

Medial Axis Transform

# 生成与简化算法研究

姓 名：陆文佳

杨超凡

肖 博

指导老师：邓俊辉

日 期：2015-06-14

## 目录

<b>1. 研究背景与概述</b> .....	1
1.1 Medial Axis 概述 .....	1
1.2 研究背景 .....	1
<b>2. 实验环境</b> .....	1
2.1 开发和编译环境 .....	1
2.2 依赖库 .....	2
2.3 版本控制 .....	2
<b>3. 数据结构</b> .....	2
<b>4. MAT 生成</b> .....	2
<b>5. 不同 MAT 简化算法与实现</b> .....	3
5.1 Angle-Based Method .....	3
5.2 $\lambda$ -medial Axis Method .....	3
5.3 SAT(Scale Axis Transform) .....	4
5.4 Progressive Medial Axis Filtration .....	5
5.5 HEM( Hausdorff Error-based Method) .....	5
<b>6. 不同 MAT 简化算法对比分析</b> .....	6
6.1 Angle-Based Method 简化结果 .....	6
6.2 $\lambda$ -medial Axis Method 简化结果 .....	6
6.3 Angle-Based Method 简化结果 .....	6
6.4 PMA 简化结果 .....	7
6.5 HEM 简化结果 .....	7
<b>7. 总结</b> .....	8
<b>8. 参考文献</b> .....	8

## 1. 研究背景与概述

### 1.1 Medial Axis 概述

Medial Axis 于 1967 年由 Blum H 等人<sup>[1]</sup>提出，它是由模型内一系列点组成的，以这些点为圆（球）心得到的圆（球）与模型的边界相切，并且至少存在两个切点。Medial Axis 以及其中所有点和点到模型边界的距离统称为 Medial Axis Transform (MAT)。

得益于其独特的表示方式，MAT 经常被应用在图形学的各个领域当中，例如形状识别、运动路径规划、形状分割、表面重构、特征提取、形状逼近等。

### 1.2 研究背景

MAT 有一个众所周知的缺点——不稳定性：MAT 对于网格边界的噪声和扰动非常敏感，两个相似的模型的 MAT 可能相差甚远，即便是细微的扰动也可能导致计算出来的 MAT 上产生许多不稳定的分支，这些分支通常以单独悬挂的线段或者细长的三角形的形式出现在 MAT 主体部分附件，通常称为“毛刺”。

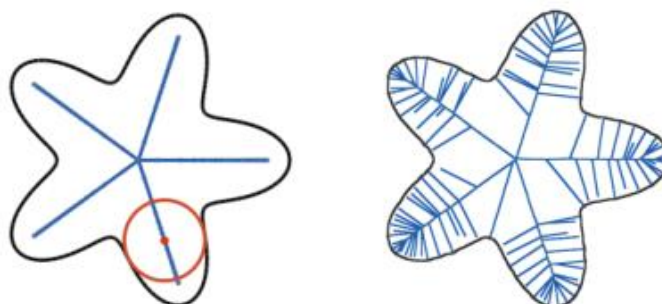


图 1 二维模型中的 Medial Axis 表示

如图 1 所示，这些毛刺几乎对于几何形状没有贡献，却占据了大量存储空间，并复杂化了 MAT。因此，我们希望研究 MAT 的简化方法，观察如何使用更简单的 MAT 来表示三维模型。

## 2. 实验环境

### 2.1 开发和编译环境

操作系统：Windows 7/ Windows 8 64-bit

编辑软件：Visual Studio 2012

编译器： Visual Studio 2012

CPU： Inter(R) Core(TM) i5-3470 CPU @ 3.20 GHz 3.60 GHz

内存： 16.0 GB

测试模式： release

## 2.2 依赖库

Qt 4.8 及之后版本

CGAL 4.2 及之后版本

Boost 1.55 及之后版本

Eigen-eigen

## 2.3 版本控制

Git + SourceTree

## 3. 数据结构

本文主要沿用了 CGAL 及 boost 库中图形相关数据结构，大致可分为两个部分：

- CGAL 中 Delaunay Triangulation 相关数据结构，用于初始的 MAT 计算。
- Boost 中 adjacency\_list 相关数据结构，用以表示边、点关系，用于 MAT 的简化算法。

对于 MAT 中的点，我们赋予其属性以方便简化过程中的计算。除最基本的属性，位置和半径以外，还存有 Medial Axis 重构出的球与模型切点所成角度，所成外接圆半径以供 Angle-Based Method 和  $\lambda$ -Medial Axis Method 的计算，存储相邻采样点以供 HEM 算法计算。

对于 MAT 中的边，同样也有相应属性以方便后续计算。由于 HEM 和 PMA 算法需要压缩边，所以边中也存有压缩代价和应该被合并的点。

## 4. MAT 生成

想要得到几何上完全精确的中轴变换需要花费巨大的计算代价，因此本实验中采用了 Amenta 等人于 2001 年提出的一种近似生成 Medial Axis 的方法<sup>[13]</sup>并对其进行简化，简化算法如下：

- 根据模型边界的采样点计算得到相应的 Voronoi Diagram。（图 2 中的蓝边及红边）
- 选择模型内部的 Voronoi Vertex 作为中轴点。（图 2 中的黄色顶点）
- 根据原有的连接关系将离散的 Voronoi Vertex 连接起来。（图 2 中的红色线段）
- 如图 2 所示，根据上述算法即可获得一个非流形的网格。



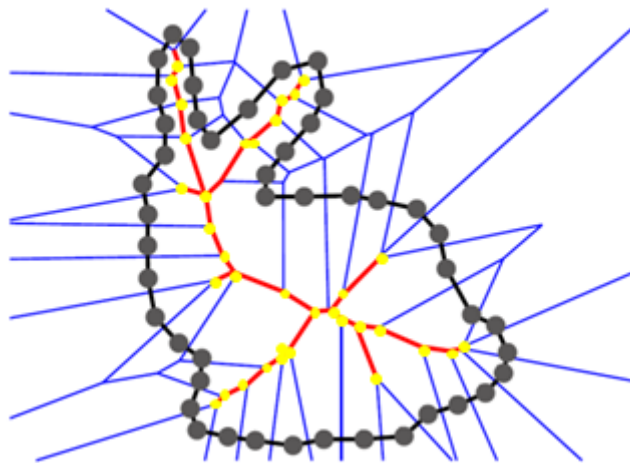


图 2 基于 Voronoi Diagram 方法计算得到的二维模型中轴表示  
Amenta 等人<sup>[14]</sup>证明过，当采样点逼近于无穷大时，该方法得到的中轴变换会向真正的中轴变换收敛。

## 5. 不同 MAT 简化算法与实现

### 5.1 Angle-Based Method<sup>[2]-[6]</sup>

基于角度的 MAT 简化方法通过 Medial Axis 点对应的与模型相切的球（中轴球）提取的几何信息来判断中轴球的重要性，然后逐渐移除中轴点达到简化的目的。具体算法实现如下：

- 在计算初始 Medial Axis 的时候，预先计算每个球和模型的切点，切点与球心所成角度决定了中轴球的重要性。如图 3 所示。
- 选择重要性最小的点去除。
- 重复 b) 直至达到用户指定阈值。

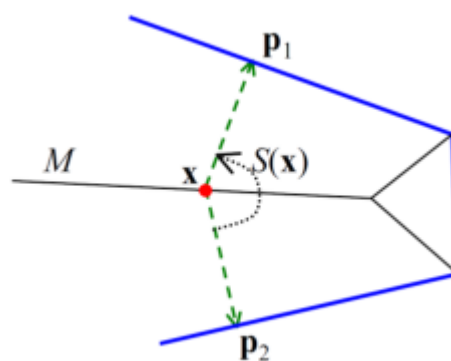
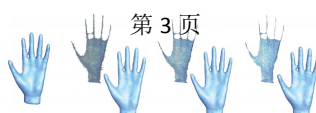


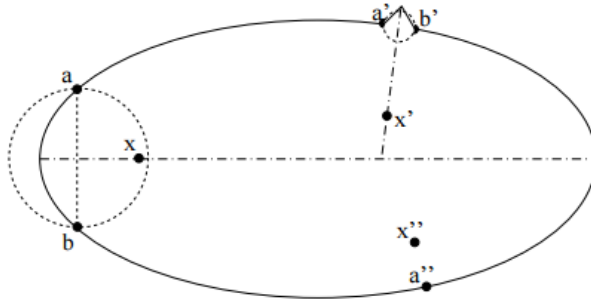
图 3 Angle-Based Method 角度示意

### 5.2 $\lambda$ -medial Axis Method<sup>[7]</sup>

基于外接球半径的 MAT 简化方法对每个 Medial Axis 点计算得到一个外接球半径，如果该半径值小于一个指定阈值 $\lambda$ ，则该 Medial Axis 点将会被移除。具体算法实现如下：



- 在计算初始 Medial Axis 的时候，预先计算每个球和模型的切点，针对距离最近的切点构造外接球，外接球的半径 $\lambda$ 决定了中轴球的重要性。如图 4 所示。
- 选择 $\lambda$ 最小的点去除
- 重复 b)直至达到用户指定阈值。

图 4  $\lambda$ -Medial Axis Method 半径示意

### 5.3 SAT(Scale Axis Transform) [8][9]

比例轴变换方法的定义是基于乘法的缩放操作，用于减少局部的细小特征。在 MAT 的框架下，图形可以被表征为一组球的集合，因此上述操作可以通过移除附近包含较大中轴球的小中轴球来完成。具体操作方法如下：

- 如图 5b 所示，通过一个因数 $s > 1$ 来放大每一个中轴球。
- 如图 5c 所示，寻找所有被较大中轴球包围的小中轴球。
- 移除被选中的中轴球。
- 重复第 b)c)步操作，直到所有中轴球都不互相覆盖。
- 如图 5d 使用因数 $\frac{1}{s}$ 来缩小每一个保留下来的中轴球，得到最后的 MAT 表示。

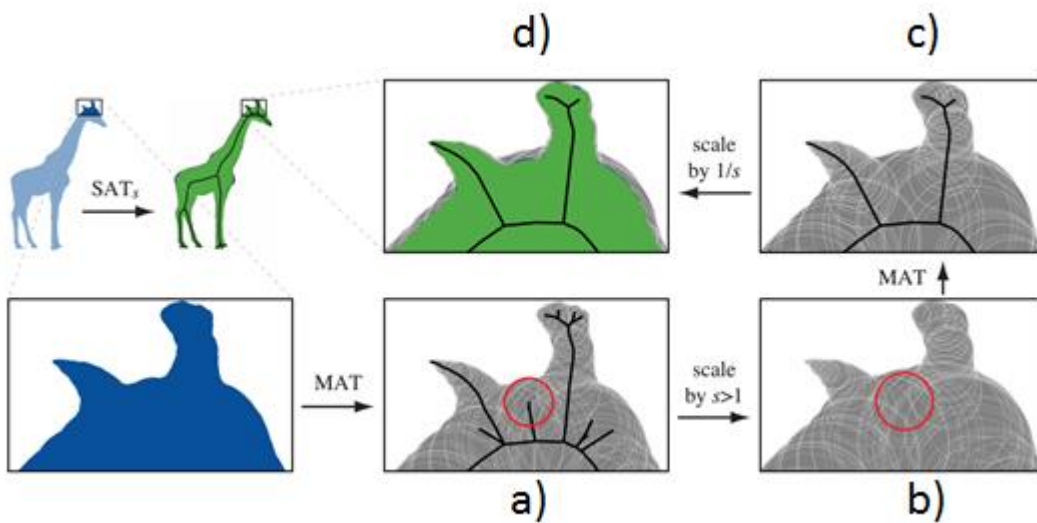


图 5 基于 SAT 简化方法示意图

## 5.4 Progressive Medial Axis Filtration <sup>[10]</sup>

渐近中轴变换简化方法通过对 MAT 的边进行合并的方式来进行简化。对于 MAT 中每一条边所包含的两个中轴球计算两球球心之间的长度与两球半径之差的比值，根据比值决定哪条边进行合并。具体算法实现如下：

- 遍历所有边，计算每条边合并成一个点的代价，代价定义为两球球心之间的长度与两球半径之差的比值。详见图 6 构建优先队列。
- 合并代价最小的边，直接将半径小的点合并到半径大的点上。
- 更新合并之后的边，及代价，更新优先队列。
- 重复 b) c) 直至达到用户指定阈值。

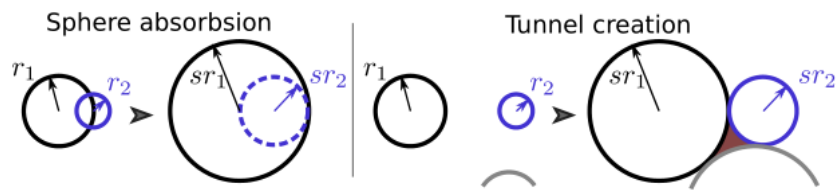


图 6 PMA 合并边的代价示意

## 5.5 HEM( Hausdorff Error-based Method)<sup>[11][12]</sup>

基于 Hausdorff 距离的 MAT 简化方法是基于边合并的 MAT 简化方法，在简化的过程中会计算每条边合并后从原始模型到简化后重构出来的模型的单边 Hausdorff 距离作为合并代价，根据此代价对边合并顺序进行排序，直到最后达到简化所要求的最大误差。具体算法实现如下：

- 在计算初始 Medial Axis 的时候，预先对模型表面点进行采样。
- 遍历所有边，计算每条边合并成一个点的代价，代价定义为左点距离边界的最小值减去左点半径，和右点距离边界最小值减去右点半径，这两个值中的最小值。详见图 7。构建优先队列。
- 合并代价最小的边，选择合并代价小的点并合并。
- 更新合并之后的边及其合并代价，更新优先队列。
- 重复 c)d) 直至达到用户指定阈值。

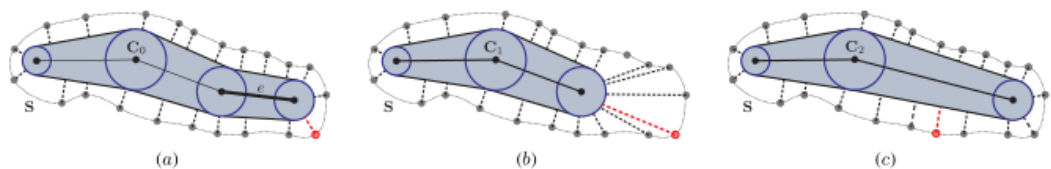

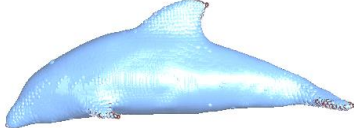

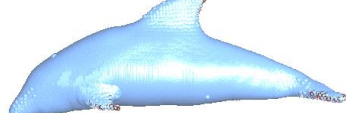

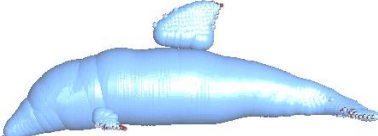


图 7 HEM 合并边的代价示意


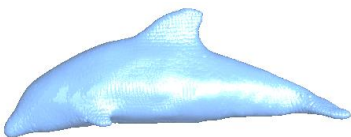



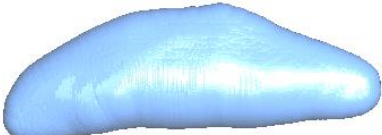
## 6. 不同 MAT 简化算法对比分析

### 6.1 Angle-Based Method 简化结果

参数	简化点数	简化结果	重构结果
2	3405		
4	7534		
6	14042		

可以观察到，基于角度的 MAT 简化方法能够较大程度保持模型的形状，但是简化后的 Medial Axis 仍有很多毛刺，而且 Medial Axis 出现了中断。

### 6.2 $\lambda$ -medial Axis Method 简化结果

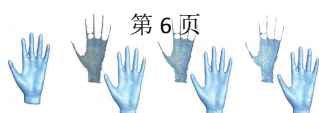
参数	简化点数	简化结果	重构结果
3	3781		
10	10844		
15	13007		

基于外接圆半径的简化方法 Medial Axis 的拓扑结构能够被保持，而且去除了毛刺，但是重构出的模型的结构出现了较大变化，甚至模型部分丢失。


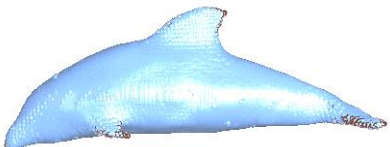

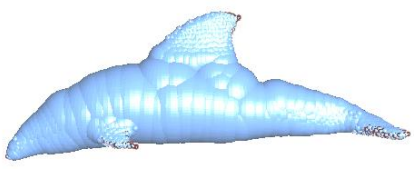
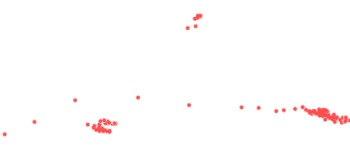
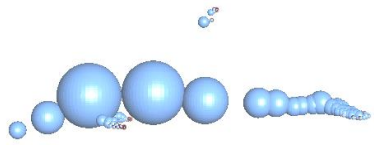
### 6.3 Angle-Based Method 简化结果

#### 1. SAT 简化结果

参数	简化点数	简化结果	重构结果
----	------	------	------


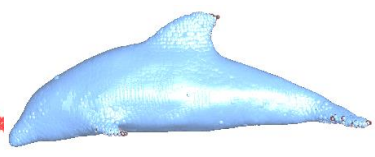
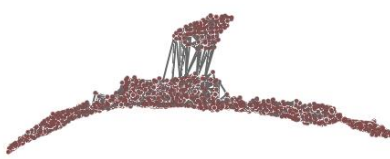
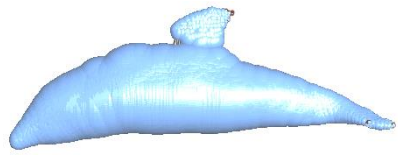

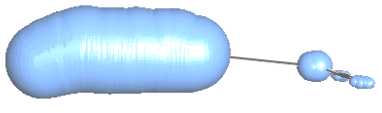




1.01	8438		
1.1	15762		
1.5	17251		

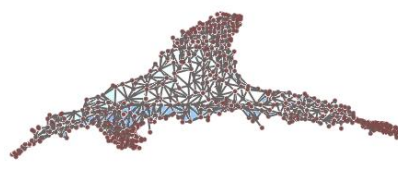
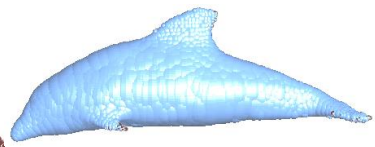
相比于上述两种算法，SAT 算法能够有较大幅度的简化，也能较好的保持模型的形状，但是计算较慢。

#### 6.4 PMA 简化结果

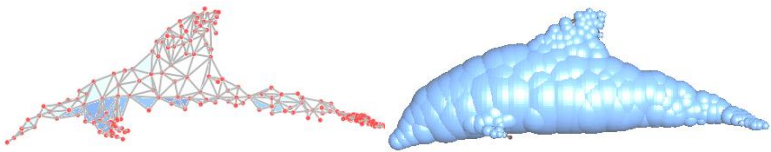
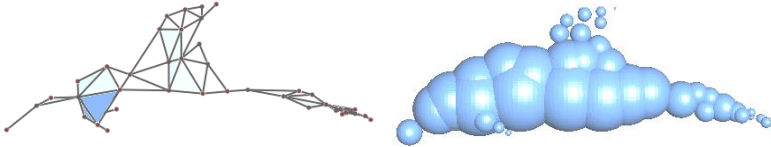
参数	简化点数	简化结果	重构结果
1	12847		
2	15647		
5	17191		

PMA 算法也能做较大幅度的简化，相比 SAT 计算较快，但是较大简化后重构出的模型结构容易丢失。

#### 6.5 HEM 简化结果

参数	简化点数	简化结果	重构结果
1	16534		



3	17168	
10	17326	

HEM 算法能在较大程度简化的情况下保证重构出的模型的结构，如果加上球之间的插值，能够更大程度减小误差。

## 7. 总结

纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行。通过本次实验，我们将各种课堂上学到的几何学基础知识，诸如：Voronoi 图、Delaunay 三角剖分、MA 等知识付诸实践，得到了更充分的理解。

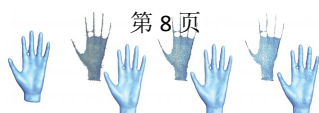
其次，在崇尚大道至简的今天，图形图像领域中大数据量往往成为制约某一方向发展的瓶颈。尤其是诸如 Medial Axis 等图形表示方法，将其进行简化是一项非常重要且热门的工作。通过本次实验，我们也同样充分了解了不同的 MAT 简化方法以及他们各自的利弊。

此外，本次实验历时 2 个月，在实验过程中，组内同学充分沟通、互相帮助，大大加速了研究进程的同时让我们感受到了团队开发研究的乐趣。

最后，感谢邓俊辉老师幽默风趣的课堂教学以及推陈出新的实践练习方式，增强了原本枯燥课程的趣味性，充分调动了课堂内外的积极性，使得我们收益良多！

## 8. 参考文献

- [1] Blum H, Nagel R N. Shape description using weighted symmetric axis features. *Pattern recognition*, 1978, 10(3): 167-180.
- [2] Amenta N, Choi S, Kolluri R K. The power crust. *Proceedings of Proceedings of the sixth ACM symposium on Solid modeling and applications*. ACM, 2001. 249–266.
- [3] Attali D, Montanvert A. Modeling noise for a better simplification of skeletons. *Proceedings of Image Processing, 1996. Proceedings., International Conference on*, volume 3. IEEE, 1996. 13–16.
- [4] Foskey M, Lin M C, Manocha D. Efficient computation of a simplified medial axis. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 2003, 3(4):274–284.
- [5] Dey T K, Zhao W. Approximate medial axis as a voronoi subcomplex. *Computer-*



Aided Design, 2004, 36(2):195–202.

[6] Dey T K, Zhao W. Approximate medial axis as a voronoi subcomplex. Computer-Aided Design, 2004, 36(2):195–202.

[7] Chazal F, Lieutier A. The “ $\lambda$ -medial axis”. Graphical Models, 2005, 67(4):304–331.

[8] Giesen J, Miklos B, Pauly M, et al. The Scale Axis Transform. Proceedings of Proceedings of the Twenty-fifth Annual Symposium on Computational Geometry, New York, NY, USA:ACM, 2009. 106–115.

[9] Miklos B, Giesen J, Pauly M. Discrete scale axis representations for 3D geometry. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2010, 29(4):101.

[10] Faraj N, Thiery J M, Boubekeur T. Progressive medial axis filtration. Proceedings of SIGGRAPH Asia 2013 Technical Briefs. ACM, 2013. 3.

[11] Sun F, Choi Y K, Yu Y, et al. Medial Meshes for Volume Approximation[J]. arXiv preprint arXiv:1308.3917, 2013.

[12] Sun F, Choi Y, Yu Y, et al. Medial Meshes: A Compact and Accurate Medial Shape Representation. TVCG, submitted, 2014.

[13] Amenta N, Choi S, Kolluri R K. The power crust[C].Proceedings of the sixth ACM symposium on Solid modeling and applications. ACM, 2001: 249-266.

[14] Amenta N, Bern M. Surface reconstruction by Voronoi filtering[J]. Discrete & Computational Geometry, 1999, 22(4): 481-504.