梯形化及点定位

1.问题背景

1.1 点定位概念

平面点定位就是对点位置的查询。在一个包含 n 条边的平面字区域划分 τ 中，对处于其中的任意点 q，在 τ 中找出 q 所处的那张子平面。本实验的要求是，在输入的线段集中，找出与从 q 出发的垂直向上的射线相交的第一条线段，并返回其编号，要是 q 恰好落在某条边上，或者恰好与某个顶点重合，查询算法也必须返回这些信息。

1.2 线段不相交

若平面上两条线段不相交，或者只相交于它们的一个共同端点，都称它们是互不相交的

1.3 一般性位置线段

由 n 条线段构成的集合 S，其中的线段互不相交，而且任何两个端点都不会处于同一条垂线上，这样的一个集合称为一般性位置线段。

1.4 梯形图 τ(S)

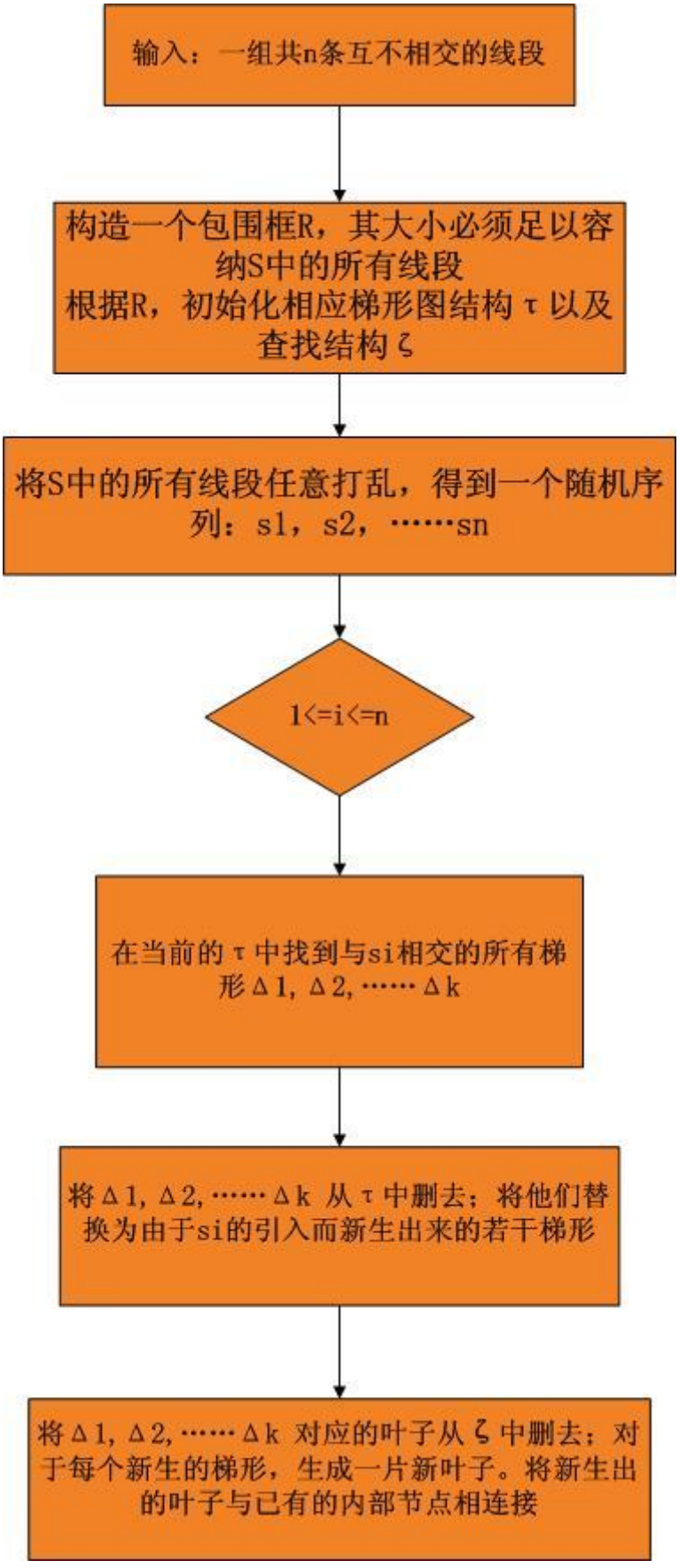
引入一个与坐标轴平行的矩形 R，R 必须大到能容纳下 S 中的所有线段。S 的梯形图 τ(S)也称为 S 的垂直分解或者梯形分解。梯形图是这样得到的：经过 S 中每条线段的每个端点，向上的和向下个发出一条垂直射线；在碰到 S 中的另一条线段或者 R 的边界后射线终止，将它们分别称为上垂直延长线和下垂直延长线。S 的梯形图就是由线

段集 S，矩形 R 以及所有的上垂直延长线和下垂直延长线导出的一个之区域划分。

1.5 所构造的数据结构

这种支持点定位的数据结构ζ称作查找结构。它是一副有向无环图，有唯一的根节点，同时对应于 S 的梯形图中的每个梯形有且仅有一片叶子，每个内部节点的出度都是 2。所有内部的节点分为两类：x 节点和 y 节点。每个 x 节点都被标记为 S 中某条线段的一个端点；每个 y 节点都被标记为某条线段。

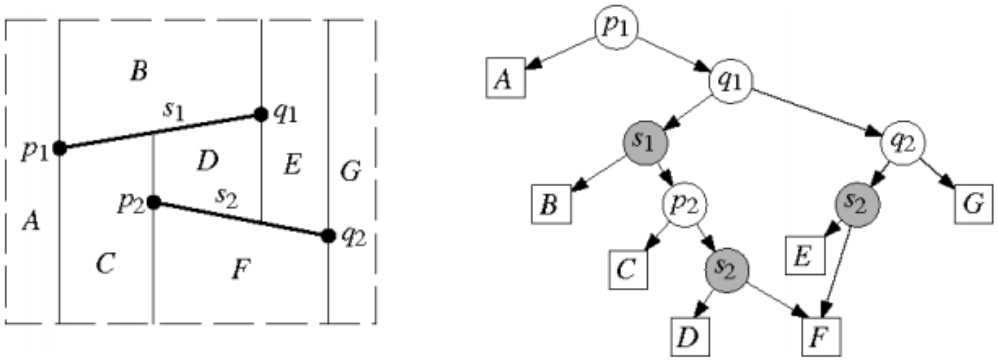
2.算法描述


输入：一组共n条互不相交的线段
构造一个包围框R，其大小必须足以容纳S中的所有线段
根据R，初始化相应梯形图结构τ以及查找结构ζ
将S中的所有线段任意打乱，得到一个随机序列：s1，s2，……sn
1<=i<=n
在当前的τ中找到与si相交的所有梯形Δ1，Δ2，……Δk
将Δ1，Δ2，……Δk 从τ中删去；将他们替换为由于si的引入而新生出来的若干梯形
将Δ1，Δ2，……Δk 对应的叶子从ζ中删去；对于每个新生的梯形，生成一片新叶子。将新生出的叶子与已有的内部节点相连接

在引入线段 si，查找该线段穿过的梯形时，采用了 DCEL 结构，首先根据点定位（S_i 的左端点）找到第一个梯形，然后根据 DCEL 半边找出下一个梯形 S_{i+1}。由于线段集是不相交的，从一个梯形区域翻到相邻的梯形区域时，线段只会穿过垂直边，因此 DCEL 结构中只需存储梯形的垂直边，在此实验中，顶点的信息也不重要，DCEL 只需存储边和面得关系即可。

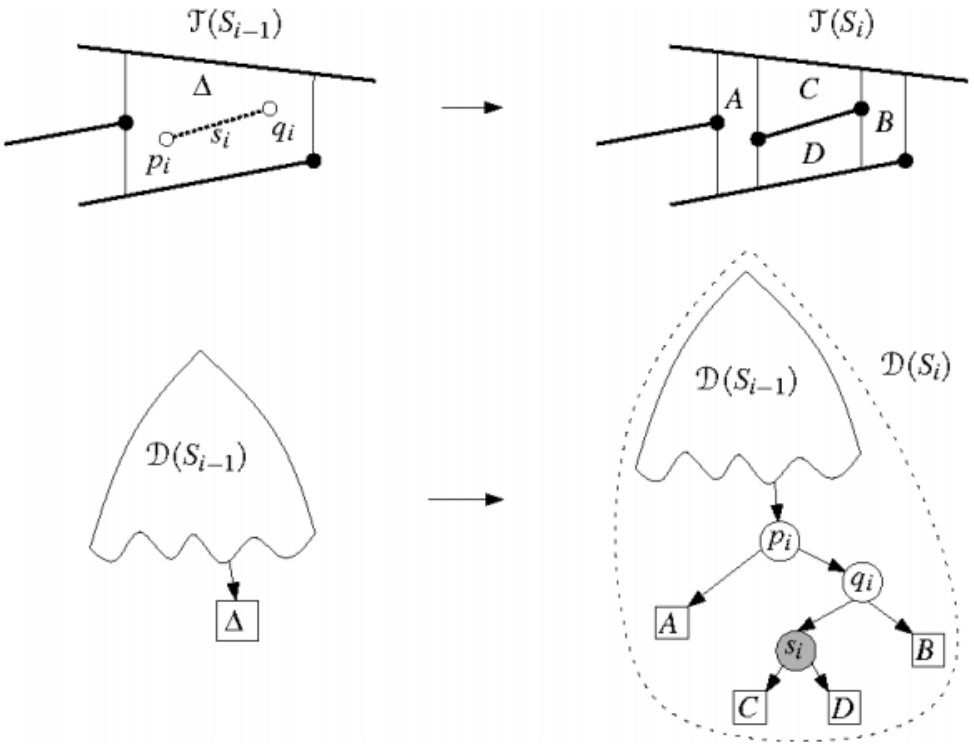
3.算法分析

在对点 q 进行查询时，要从根节点出发，沿着某条有向路径达到某片叶子，最终达到那片叶子，就对应于 τ （S）中包含 q 的那个梯形。再沿查找路径前进时，每遇到一个新的节点，都要将其与 q 进行对比，以确定应该继续前进到其两个子节点中的哪一个。若是 x 节点，则按如下形式进行比较：取出存储于该节点处的那个端点；相对应于经过该端点的那条垂线，q 是位于左侧还是右侧？若是 y 节点，则比较的方法如下：取出存储于该节点的那条线段 s；相对于这条线段，q 是位于上方还是下方？这种算法构造出来的查找结构和梯形图是相互关联的：梯形与叶子是一一对应的；每个梯形都可以通过指针，找到与自己对应的叶子；反过来，每片叶子都可以通过指针，找到与自己对应的梯形。



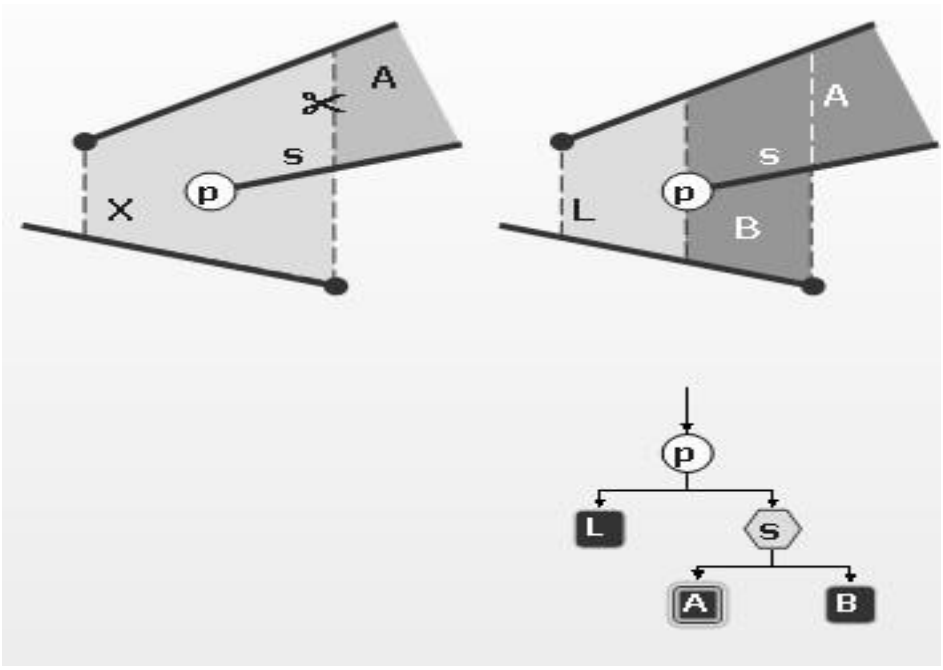
下面是引入线段时的两种情况。

（1）线段完全落在某个梯形内



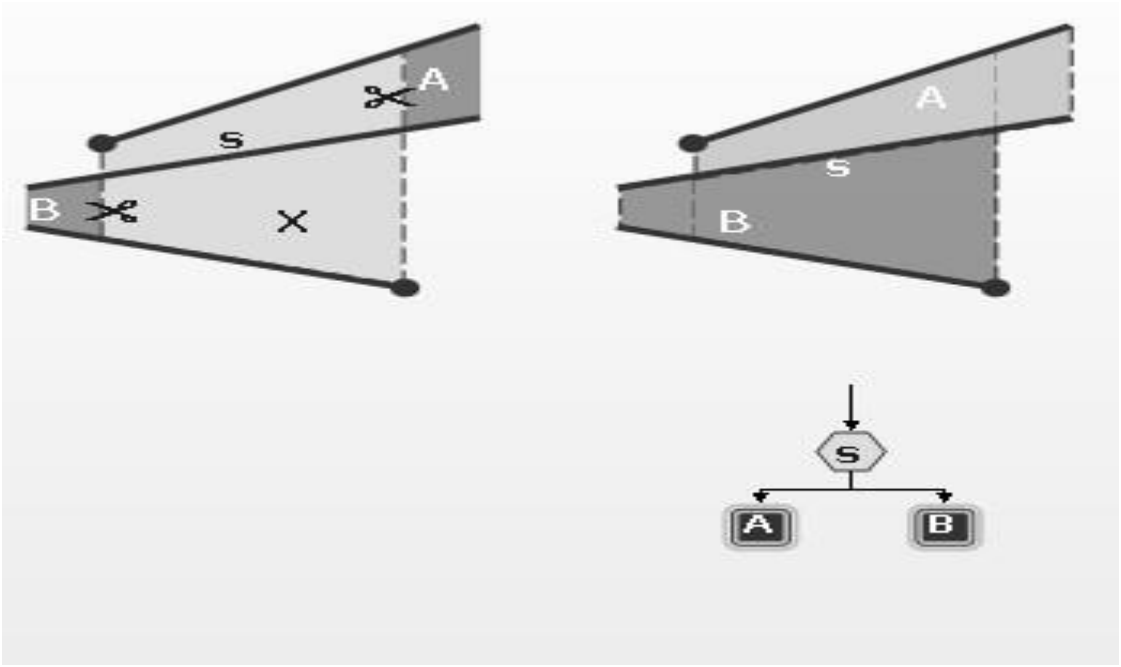
将原先对应于 Δ 的那片叶子，替换为一颗包含四片叶子的小树。这棵树中含有两个 x 节点，分别用来对 si 的左右端点进行比较；还有一个 y 节点，用来对 si 本身进行比较。

（2）线段一个端点落在梯形中



在上图所示这种情况中（线段的左端点在梯形中），L、B 为新生成的梯形区域，A 将和后面的梯形的一部分融合。如果线段的有端点在梯形中，其情况恰好相反。

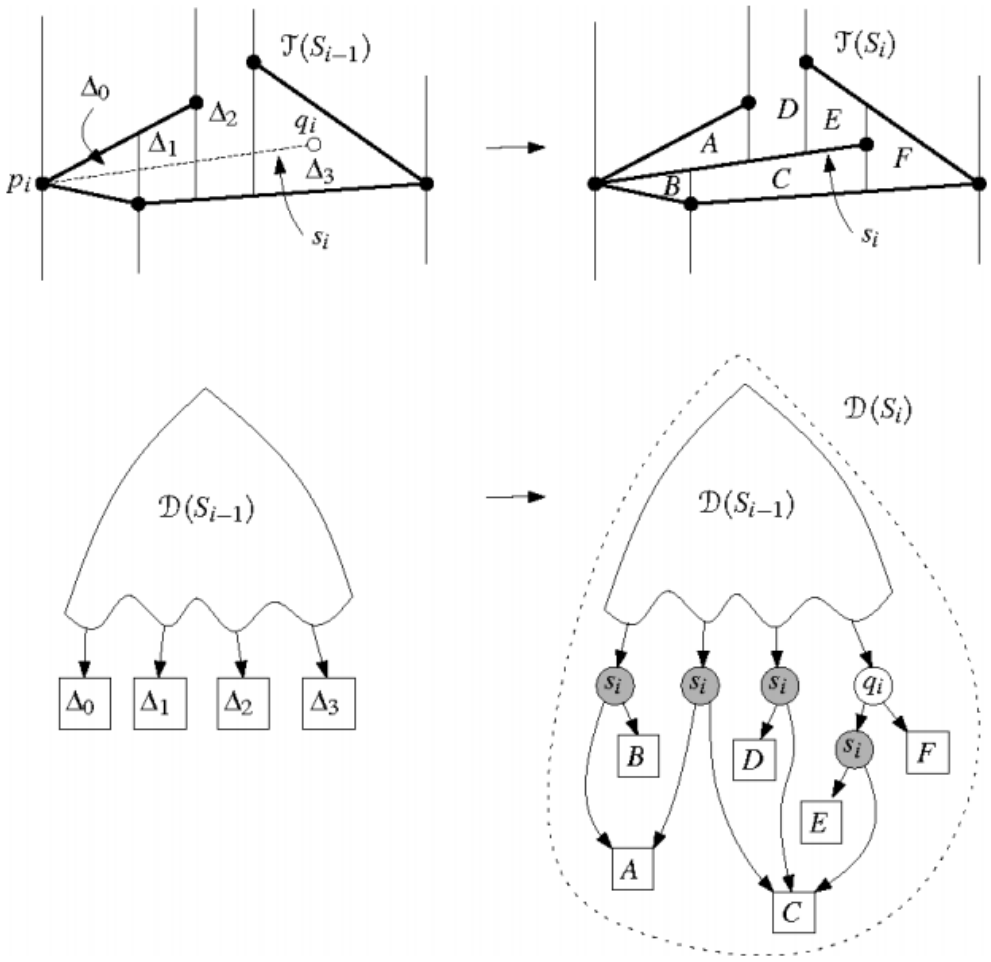
（3）线段穿过梯形



可分为两类情况，一类是梯形的左右端点都在线段同侧，一类在异侧，如在异侧，就如上图所示，其中 A 与后面的梯形融合，B 与前面的梯

形（如情况 2 中向后融合的梯形）融合。

按照上述的集中情况不断地分裂合并，最终会完成如下图所示的过程。



删除对应于Δ0， Δ1， Δ2，……Δk 的叶子，然后为每个新的梯形分别生成一片叶子，最后还要引入若干新的内部节点。

对于构造梯形图和搜索结构的算法，时间复杂度为 O(nlgn)，查找点时，时间复杂度为 O(lgn)。

4.实验所用数据结构

1、查找结构

由三类节点构成，线段的顶点、线段和梯形区域。在梯形区域对应的数据结构中需存储它的父节点，其父节点数目不定，用链表存储。

顶点对应的数据结构：

```
class CVertexNode : public CNode
{
public:
      float x;
      float y;
};
```

线段对应的数据结构：

```
class CLineNode : public CNode
{
public:
   CVertexNode * s;   //起始节点
   CVertexNode * d;   //尾节点
   int no;           //编号
};
```

梯形区域的数据结构：

```
class CTrapezoidalNode : public CNode
{
public:
```

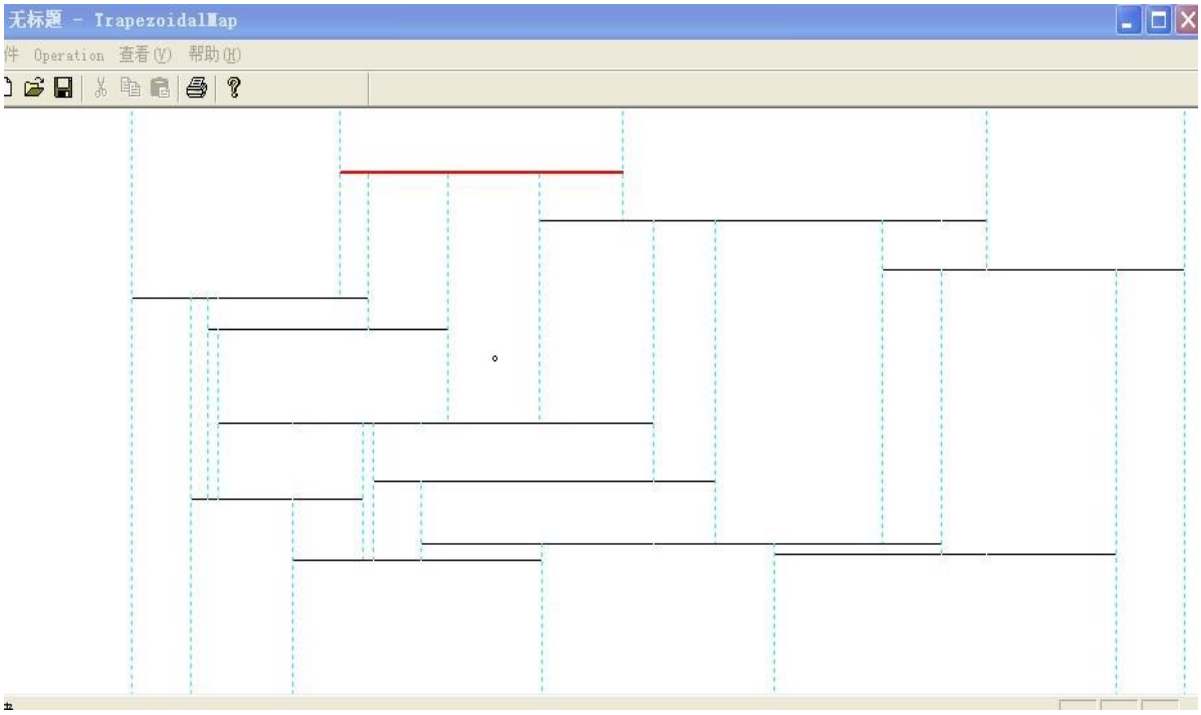
```
    void AddParent(CNode *p);
    CLineNode* top;        //梯形区域的上边界
    CLineNode* bottom;     //下边界
    CVertexNode *left;     //梯形区域的左端点
    CVertexNode *right;    //梯形区域的右端点
    typedef struct Parent{
        CNode *parent;
        struct Parent *next;
    }Parent;               //父节点
    Parent *phead;
    CHalfEdge *edge;       // 对应的第一条半边
};
```

2、梯形图的结构

```
    class CHalfEdge
{
public:
    float x;          // 半边所在的 x 坐标
    float ymin;        //半边 y 坐标方向的最小值
    float ymax;         //半边 y 坐标的最大值
    CNode *face;
    CHalfEdge *twin;
    CHalfEdge *next;
```

};

5.实验结果



测试结果