Voronoi 图

《计算几何》课程报告（一）
马赓宇（994997） 史树明（994871） 罗明（996000）

摘要

本文是关于 Voronoi 图的一个总体性研究报告。我们在查阅各种资料的基础上阐述了 Voronoi 图的定义、各种变形、算法、应用以及它与凸包、Delaunay 三角化等的密切关系，还给出了与 Voronoi 图相关的网络资源，便于博采众家之长和进行深入研究。同时对 Voronoi 图的性质、变形以及算法提出了自己的见解。

一．Voronoi 图的定义和基本性质

定义

平面上若干个点（Site）的 Voronoi 图是对平面的一个划分，把平面分成若干区域，同一个区域中的所有点到某一点的距离最近，这些区域称为 Voronoi 单元（Cell），相邻单元之间的分界线成为 Voronoi 边（Edge），相邻两个或多个 Voronoi 边的交点称为 Voronoi 顶点（Vertice）。Voronoi 边上的点到两个 Site 的距离相等并小于到其它 Site 的距离；而 Voronoi 顶点到多个（≥3）Site 的距离相等并小于到其它 Site 的距离。

以上是 Voronoi 图最初的定义，一般来说，上述定义可以从如下方面进行一般化推广：

- ✓ Voronoi 图不仅仅局限于二维空间，可以类似定义任意维空间的 Voronoi 图；
- ✓ Site 不仅仅局限于点，还可以是线段、直线、多边形、二次曲线（圆、椭圆、抛物线、双曲线等）以及其它各种复杂形状；当然也可以是空间形体；
- ✓ 距离不仅仅局限于二次欧氏距离（$\|\cdot\|_2$），还可以是$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_\infty$以及其它各种距离；

可以对 Voronoi 图作如下形式化定义：

设 S={Si | Si 是 n 维空间的几何形体}，给出 n 维空间的点 P 和形体 Si 的距离的定义 d(P,Si)，则 S 的 Voronoi 图 V(S)是对空间 ε 的一个分割，使得

$$\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{n} Ci \text{，并且} Ci = \{P \mid P \in \varepsilon,\ d(P,Si\} < d(P,Sj), \forall j \neq i\}\text{，} \forall i = 1,2,...,n$$

Voronoi 图有很多形象的定义，比如火苗从几个点开始以同样的速度蔓延，到火苗交汇处彼此停止，最终对地面的分割就是 Voronoi 图；类似的例子还有水晶从几个点开始以同样的速度生长等。

性质

在欧氏平面上，若干点的 Voronoi 图具有如下基本性质：

- ✓ Voronoi 边是直线；
- ✓ Voronoi 单元是凸多边形；

在欧氏平面上，设点和线段/直线的距离定义为点到线段/直线上各点距离的最小值（更准确地说是下确界），则若干点和直线的 Voronoi 图具有如下性质：

- ✓ Voronoi 边是抛物线；

猜想：与任意一个**连通** Site 对应的 Voronoi 区域是连通的，即一个 Site 不会对应两个彼

此不连通的 Voronoi 区域。

这个猜想并不显然，尤其是 Site 的修饰词“连通”千万不能去掉，比如对于二维空间的情况，当一个 Site 是由彼此分离的两个点构成时，很容易构造出一个 Site 对应的 Voronoi 区域不连通的例子。

二．Voronoi 图的各种变形及应用

空间维度、Site 和距离是 Voronoi 图的三要素，其中“距离”是 Voronoi 图最为本质的决定因素。变换这些要素可以产生 Voronoi 图不同的变体，尤其是不同的“距离”概念决定了 Voronoi 图的丰富性和多样性。

维度变体

Voronoi 图可以在任意维空间定义。0 维空间（一个点）是一种平凡而又简单的情况；在一维空间中，若干 Site 的 Voronoi 图是由相邻 Site 的中点所分割成的线段（或射线）。而二维或更高维的情况则比较复杂。

Site 变体

最简单的情况是每个 Site 都是点，此时，在欧氏距离下，Voronoi 图的边界（Edge）是直线（包括线段和射线，对于高维空间则是超平面）。

点和线段的 Voronoi 图也是人们经常研究的一种情况，此时 Voronoi 图的边界是直线或抛物线。当这些点和线段构成简单多边形时（作为多边形的顶点和边），其在多边形内部的 Voronoi 图可以用来求多边形的中轴（Medial Axis）[1]。在课程报告二中我们将阐述一种求由多边形的边和顶点作为 Site 的 Voronoi 图的求法。

其它常见的情况还有：Site 是二次曲线（圆、椭圆、抛物线、双曲线）、多边形等。

距离变体

尽管一般情况下都在二次欧氏距离尺度下求 Voronoi 图，但距离的定义其实是很灵活多变的。

L1、L2、Lp 和 L∞距离标准下的 Voronoi 图，其外观和应用背景截然不同。

一般情况下，将点和线段的距离定义为点到线段上各个点距离的最小值，当然，定义为平均值甚至最大值都未尝不可。实际上，的确有人研究“距离最远 Voronoi 图”，即与一个 Site 对应的 Cell 是由距离此 Site 最远的点所构成的。至于点和复杂几何体之间的距离，更可以有各种不同的定义方式，从而产生不同的 Voronoi 图。

上述所讨论的“距离”对各个 Site 都是平等的，而上天并没有规定各个 Site 的距离标准必须一样，只要有应用背景和研究价值，都可以定义相应的距离并研究之。比如对于最简单的 Site 是点的情况（二维空间），至少可以通过下列几种不同的方式定义非对称距离，并且每种定义都可以找到生活中的具体实例。

1．对于空间任意一点 P，定义

$$d(P, Si) = Ti + L(P, Si)$$

其中 L(P, Si)是 P 到 Si 的欧氏距离。

以火焰燃烧为例，如果火苗从几个点以相同的速度开始蔓延，则形成通常意义上的 Voronoi 图；现在假定各个点的火焰并不同时燃烧，用 Li 表示位于 Si 点的火焰燃烧的延迟时间，则刚好对应于上述距离假设。

2．对于空间任意一点 P，定义

$$d(P, Si) = Vi \times L(P, Si)$$

其中 L(P, Si)是 P 到 Si 的欧氏距离。

这相当于火苗以相同的时间开始，但以不同的速度 Vi 蔓延。

3．更一般的情况是把距离定义为：d(P, Si) = f(i)，其中 f(i)是以 i 为自变量的函数。

既然 Site 可以是不平等的，为什么空间区域中的各个点一定要平等呢？还以上面火焰燃烧为例，同样的火焰在不同的地皮上燃烧速度不一样。这时，设 P 的坐标为(x, y)，定义 d(P, Si) = f(x,y,i)，即距离不但与 Si 有关，而且还跟考察点 P 相关。这种距离定义就综合考虑了火焰的强度、延迟时间以及地皮的燃烧速度等因素。

Voronoi 图的各种变体之间是有内在联系的，比如下面两种变体之间存在着内在的等价关系：

1) Si（i=1,2,…n）都是平面上的点，定义距离为：d(P, Si) = Ti + L(P, Si)；
2) Si（i=1,2,…n）都是平面上的圆，其半径分别为 Ti。

应用

Voronoi 图的概念源于生活实例，对它的形式化定义和求解算法研究等都是为了应用于实际以产生价值，应用推进了其研究。[3]对 Voronoi 图的应用进行了一些总结，下面所举的应用实例大多来源于此。

- ✓ 人类学和考古学：考察由不同的部落、首领、堡垒等所确定的势力范围或影响范围。
- ✓ 天文学：识别星群和星系群，比如由太阳和其它恒星所确定的星系。
- ✓ 生物学、生态学和林学：不同植物间生存竞争关系的研究与模型。
- ✓ 几何学：多面体的“好的”三角化方案。
- ✓ 气象学：根据几个点的降雨量测量来估计一个地区的平均降雨量。
- ✓ 模式识别：从二维形状提取出一位信息，从而找到形状的简单描述，比如“中轴”和“骨架”。
- ✓ 生理学：通过肌肉组织截面的毛细管分布情况的分析来计算氧传输。
- ✓ 机器人技术：在有障碍物情况下的路径规划。
- ✓ 统计学：分析统计聚类。
- ✓ 动物学：动物疆域的分析。

三．Voronoi 图与其它计算几何概念的关系

计算几何是一个社会，每种概念相当于一个家庭，分析和认识各个家庭之间的联姻关系，将有助于理解这个社会本身，而且有时候必须从彼此之间关系的角度才能够更容易地认识到其本质，“关系”本身就蕴涵着丰富的信息量。Voronoi 图与某些其它计算结合概念之间有着非常美妙的关系：它是 Delaunay 三角化的对偶图；它和高维空间中的凸包存在着一一对应关系。

Voronoi 图与 Delaunay 三角化

Delaunay 三角化（Delaunay Triangulation）是指满足下列条件的三角化：三角化后每个三角形的三个顶点的外接圆都不包含其它顶点。形象地说，Delaunay 三角化使得结果三角形不会太“扁”，这样的三角形具有许多好的性质。

Voronoi 图是 Delaunay 三角化的对偶图（dual）：如果已知 Delaunay 三角化，在每两个拥有公共边的三角形外心间连接线段，则形成 Voronoi 图；反过来，如果已知 Voronoi 图，对于每两个拥有公共边（Edge）的 Voronoi 单元，在其对应的 Site 之间连线，则形成 Delaunay 分解。

利用 Voronoi 图与 Delaunay 三角化的这种对偶性，可以利用 Delaunay 分解来求 Voronoi 图，反之亦然。很容易知道 Voronoi 图与 Delaunay 三角化的相互转化可以在线性时间内完成，所以一旦其中一个找到了一个复杂度≥O(n)的算法，另外一个也会如此。

Voronoi 图与凸包

通过一种变换 ε 可以把 n 维空间的点映射为 n+1 维空间的超平面（大致方法是把点映射到单位抛物面上，然后取抛物面过此点的切平面），这些超平面的交再投影回 n 维空间就得到了点的 Voronoi 图。[1]对此给出了清楚简洁的解释与图解。

上述变换的时间复杂度是 O(n)，所以一旦给出了 n+1 维空间凸包的求解方法，n 维空间点的 Voronoi 图的求解方法也相应地得到了解决，并且复杂度不会高于 n+1 维空间凸包求解的复杂度。

问题：当 Site 是点时，可以定义上述映射关系，那么当 Site 是线段、多边形、二次曲线甚至复杂形体时如何建立映射关系而使 Voronoi 图求解与凸包建立联系呢？

由于时间原因，我们没有对这个问题作深入的研究，可能的解决方案有：

- ✓ 把 n 维空间 Site 所包含的每个点都投影到 n+1 维空间中去；
- ✓ 扩展凸包的定义，我们猜想：点的 Voronoi 图对应一般意义上的凸包，而复杂形体的 Voronoi 图则对应扩展定义的凸包。

四．求解 Voronoi 图的各种算法

求解 Voronoi 图的算法有很多种，其时间、空间复杂度以及实现的复杂程度千差万别，但其基本算法不外乎两种：增量法（Incremental Algorithm）与合并法（Divide and Conquer，或称为 Merge Algorithm）。其它很多算法都是在这两种方法基础上的变形和优化。

基本算法

增量法和合并法是求解许多问题的基本方法，Voronoi 图也不例外，这两种方法分别体现了两种基本的策略：一步一个脚印（Step by Step）和分而治之（Divide and Conquer）。

- 增量法

增量法每次加入一个 Site，每当加入一个 Site 都进行如下操作：

1. 求出新增加 Site 与每个现存 Site 的平分线（bisector）；
2. 去掉多余的边（多余的边指两个 Site 平分线上到第三个 Site 距离更近的部分）。

不加以任何优化的增量法，其复杂度是 $O(n^2)$，因为在最坏情况下，每加入一个 Site 都要计算与现存所有 Site 的交线。但一般说来，当点以随机顺序插入时，平均来讲，可以假定每加入一个 Site 需要计算交点的次数是现存 Site 数目的 1/2，这样总体平均复杂度为 O(n*log*n)。或者从统计角度来说，不考虑具体的一个点集，计算其 Voronoi 图的**期望**时间复杂度是 O(n*log*n)。

- 合并法

合并法由 Chamos 和 Hoey 最早用于 Voronoi 图领域，其基本思路是把 n 个 Site 分成两部分，每部分含有 n/2 个 Site，分别计算两部分 Site 的 Voronoi 图，然后通过找到两部分 Site 的分割边而合并为一个 Voronoi 图。需要说明的是计算每部分 Site 的 Voronoi 图时也采用合并法，所以整个是一个递归的过程。合并过程可以通过一种称为“walking ant”的方法来实现，时间复杂度是 O(n)，所以整个过程的时间复杂度是 O(n*log*n)。

合并法的优势在于其天然适合并行化，把要计算的 n 个 Site 平均分到并行机的 m 个结点上，分别计算 Voronoi 图后再逐级合并。

历史上的著名算法与策略

Chamos 和 Hoey（1975）揭开了用合并法求解 Voronoi 图的序幕[7]但其实现比较复杂；

Green 和 Sibson 在 1977 年提出了一种计算点的 Voronoi 图的增量式算法[6]，其复杂度是 $O(n^2)$；

Preparata 于 1977 年提出了一种增量式算法来计算凸多边形各个边与顶点的 Voronoi 图[4]；

1982 年，Lee 在其算法中采用 Divide and Conquer 的策略解决多边形 Voronoi 图的求解问题[5]；

1985 年，Fortune 提出了一种独具一格的 Voronoi 求解方法——扫描线法[8]；

F.Chin 等于 1999 年提出了一种计算简单多边形边和顶点的 Voronoi 图的线性算法[2]；

Rajesh Ramamurthy 等人于 1999 年提出了一种计算若干由任意曲线围成的平面区域的 Voronoi 图的求解方案[9]；

…… ……

复杂图形集合的 Voronoi 图求解

Site 为复杂图形时 Voronoi 图的一种求解思路：把每个复杂图形用线段或二次曲线模拟（可以用一次或二次 Bezier 曲线），把问题归结为简单图形的 Voronoi 图，然后在结果中去掉图形的自 Voronoi 图部分。因为现在对点的 Voronoi 图求法已经比较成熟了，可以借助这种方法求若干点和线段的 Voronoi 图，方法是把线段用若干点来近似表示，只要表示的粒度足够小，就可以求出足够精确的 Voronoi 图。

其它话题

Voronoi 图求解还可以借助 Delaunay 三角化或凸包来进行，比如 Fortune 的扫描线算法就与凸包有密切的关系。

Voronoi 图的数据结构描述并不是一个简单的问题，当 Voronoi 图的边是直线时，数据结构还相对比较简单，而各种变体（比如 Site 变体和距离变体）Voronoi 图的数据结构可能非常复杂。[10]对常见距离变体 Voronoi 图的数据结构进行了分析，并提出了一种相对通用的数据结构。

五．与 Voronoi 图相关的网络资源

WWW 站点

http://www.voronoi.com/

从名字就可以知道，这是一个专门的 Voronoi 站点，它拥有有关 Voronoi 图的丰富信息以及相关链接。这个网站有 Frame 和非 Frame 两种布局形式，信息分 Theory、Applications、Tutorials、Implementation 四类。其中 Theory 部分包含了若干与 Voronoi 图有关的论文，这些论文一般都提供 html 和 pdf 格式供下载（但需要密码）；Applications 部分涉及 Voronoi 图在各个领域的应用；Tutorials 部分包含一些常见问题的解答、一些 Open 的问题以及与教学有关的一些文章（比如 Project 的介绍等）；Implementation 包含 Applets、Code、Demonstrations、Programs、Systems 五个部分，每部分包含若干链接。强烈推荐此站点。

http://www.cs.ruu.nl/CGAL

Computational Geometry Algorithms Library 的主页。

http://www.mpi-sb.mpg.de/leda/leda.htm
可以在此网站下载 Leda（说明见下）

http://www.geom.umn.edu/locate/qhull
可以在此网站下载 QHull（说明见下）

软件包、源代码、论文、文档、实用工具和演示

Construction of Voronoi diagrams using Fortune's method: A look on an Implementation (Čuk Roman)
该文粗略介绍了 Fortune 扫描线法的实现思路和数据结构。

Fully Parallel Airflow Simulation（http://www.cs.cmu.edu/）
并行气流模拟程序的文档、演示和源代码。

Voronoi-Delaunay Applet（http://www.cs.cornell.edu/Info/People/chew/delaunay.html）
一个 Java Applet，演示增量法求解 Voronoi 图，有操作和算法简介。

Delaunay Triangulations From Hulls.htm
（http://www.cs.dartmouth.edu/~gessel/Java/CGApp.html）
一个 Java Applet，演示利用三维凸包求 Voronoi 图，并演示 Voronoi 图与 Delaunay 三角化的互对偶性。

OpenGL_Applications exe src
一个利用 OpenGL 和 VC 编程实现 Voronoi 图的例子，包括源代码和示例程序。

Projects（见 \Implementation\Projects）
三个 Project 的文档说明及 Applet 演示。

Segvor_Plvor
东京大学 Toshiyuki Imai 教授的两个 Fortran 程序，分别用来计算线段和多边形的 Voronoi 图。

QHull（http://www.geom.umn.edu/locate/qhull）
计算 n 维空间凸包并通过凸包求解 Voronoi 图和 Delaunay 三角化的源程序和文档。

Leda（http://www.mpi-sb.mpg.de/leda/leda.htm）
一个包含众多数据结构和算法的库，包括 Voronoi 图的数据结构和求解算法描述。

CGAL（http://www.cs.ruu.nl/CGAL）
可以在 Computational Geometry Algorithms Library 的主页上 Down 到，包含了很多计算几何方面的基本数据结构和算法，以及和其它软件包的接口。邓老师主页上有 CGAL 的 Windows 版本。

参考文献

[1] 邓俊辉 《计算几何讲义》第二章，P21-24。

[2] F. Chin, J. Snoeyink, C. A. Wang; *Finding the Medial Axis of a Simple Polygon in Linear Time*, Discrete Comput Geom 21:405–420 (1999).

[3] Scot Drysdale, *Voronoi Diagrams: Applications from Archaology to Zoology*, geometry.forum, July 19, 1993.

[4] F.P.Preparata, *The medial axis of a simple polygon*, in: Proc. 6th Symp. On Mathematical Foundations of Computer Science(1977) pp. 443-450.

[5] D.T.Lee, Medial axis transformation of a planar shape, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 4(1982) 363-369.

[6] Green, P., and R. Sibson, *Computing Dirichlet tessellations in the plane*, Computational Journal, Vol. 21, 1977, pp. 168-173.

[7] Preparata, F. P., and Shamos, M.I., *Computational Geometry: an Introduction*, Springer-Verlang, 1985.

[8] Berg de, M., M. van Kreveld, M. Vermars, O. Schwarzhopf, *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[9] Rajesh Ramamurthy, Rida T.Farouki, *Voronoi diagram and medial axis algorithm for planar domains with curved boundaries I. Theoretical foundations*, Journal of Computational and Applied Mathematics 102(1999) 119-141.

[10] M.Gahegan, I.Lee, Data structures and algorithms to support interactive spatial analysis using dynamic Voronoi diagrams, Computers, Environment and Urban Systems 24(2000) 509-537.