随机三角剖分及其对应树的性质

邓可、应理航、常正义

内容提要：

对于任意 n 条边的凸多边形 K，它的三角剖分集记为 T_n，本课题主要研究其中的一种剖分 $\tau \in T_n$ 的“几何”性质的度量，如$\Delta_n(\tau)$表示在 τ 中，与一个顶点连接的最大的对角线的数量。众所周知，T_n 等价于 B_n 和一个非付的网格路径集 P_n。在均匀概率下，$\Delta_n(\tau)$ 和其他的一些性质都可以在 B_n、P_n 中进行精确的描述。其中一个重要的结论是：$\Delta_n(\tau)$ 非常接近于 Log n 。

一、 定义

1、任意 n 条边的凸多边形其不同的三角剖分的数量为：

$$t_n = t_2 t_{n-1} + t_3 t_{n-2} + ... + t_{n-1} t_2 \qquad t_2 = t_3 = 1$$

这是一个 calalan 数，$t_n = C_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2n-4 \\ n-2 \end{pmatrix}$

2、设$\tau \in T_n$，d_i 是与 v_i 相连的对角线的数量，定义

$\Delta_n(\tau)$ = max(d_i I=0,1,……n-1)称为顶点最大度数

显然，$\Delta_n(\tau)$ =2 时是“之”字形，$\Delta_n(\tau)$ =n-3 时，是扇形。

3、$v_i v_j$ 为一对角线，i>j 定义 $v_i v_j$ 的长度为 $\|v_i v_j\| = \min(i-j, n-(i-j))$

其物理意义是：两端点之间较短的连接边数，记

$$\lambda_n(\tau) = \max(\|v_i v_j\| : v_i v_j \in t)$$

称为最长对角线长度。显然，n/3<= λ_n <=n/2

二、 引理及定理

定理 1：$n->\infty \qquad E(\Delta_n)/\log n = 1$

事实上，$\Delta_n(\tau)$ 相当集中，对于 c>0 当 $n->\infty$ 时，

$$prob\{|\Delta_n(\tau)-\log n| \le (1+c)\log\log n\} -> 1$$

引理 1：任意顶点 v_i 它的度数为 k 的概率为：

$$prob(d_i = k) = \left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2n-5}\right)\prod_{i=1}^{k}\frac{n-2-i}{2n-5-i}$$

引理2　　λ_n的分布为

$$prob（\lambda_n = k) = \frac{nC_{k-1}}{C_{n-2}}\sum_{i=n-k}^{2k*}(*)C_{i-k-1}C_{n-i-1}$$

其中，* 表示当$i = 2k$，$n-k$时应乘以$1/2$，当$3k = n$时，用$1/3$乘

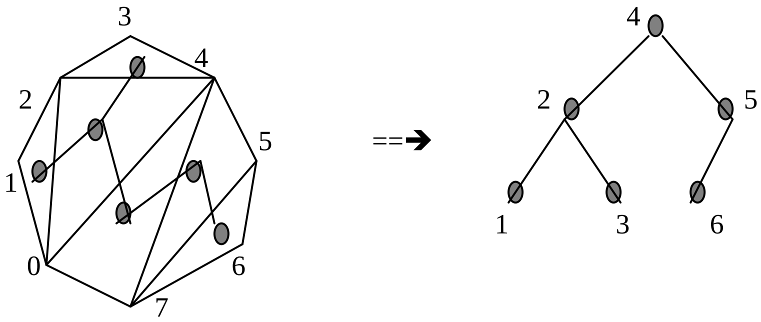
定理2　　$x \in (1/3, 1/2)$　　$n->\infty$　　$prob(\lambda_n \le nx)$趋于以下分布

$w(x) = 1/\pi x^{-2}(1-x)^{-2}(3x-1)(1-2x)^{-1/2}$

另外，$E(\lambda_n)/n --> \alpha, \alpha = 0.4654615104........$

三、 基础

标准的三角剖分对应的二叉数是这样的：$v_0 v_{n-1}$ 的在△中，如果 v_i 是△中的第三个顶点，则树根赋以 i ， 如下图



根据上述定义，T_n 等价于 B_n

现在，构造一个路径 $P(\tau) \in P_n$ 。定义一个△，由 y=0, x=n−2, y=x 三条直线围成。路径从（1，0）开始，在（n−2, n−3）处结束，假设与 v_0 连接的对角线有 j0 条，则从（1，0）向右走 j0 步，设 j_i 是从 v_i 到比其大的顶点对角线的数量，若 $j_i > 0$ 则路径行至 y = i ,然后，向右走 j_i 步。显然，不同的三角剖分对应于不同的路径。

$\Delta_n(\tau)$ 在树中的物理意义是：假设 $v_i v_j$（i<j）是 τ 中的一个对角线，取一条回路，这条回路从 $v_i v_{i-1}$ 出发，从 $v_{i+1} v_i$ 返回。这条回路首先遇到的是射入到 v_i 的对角线，然后是从 v_i 射出的对角线，v_i 的对角线数等于 $b(\tau)$ 中以 a 为根的子树中，x_i 和 a 以及 a 和 x_{i+1} 之间的节点数之和，其中 a 是包含 x_i 、 x_{i+1} 的最小子树的根。即在 $b(\tau)$ 中，从 x_i 到 x_{i+1} 所经过的内节点数目减 1。

给定一棵有$n-2$个内节点，其外节点为$x_1,x_2......x_{n-1}$ x_0为根的二叉树定义其“外部节点分割”为$x_n(b)$

$$x_n(b)=\max(\|x_i x_{i+1}\|, i=0,1....n-1)$$

其中,$\|x_i x_{i+1}\|$为路径距离减1，这样有：

引理3 任意$\tau\in T_n, \Delta_n(\tau)=x_n(b(\tau))$

给定一路径$p\in P_n$,定义它的步长−−宽度

$$S_n(p)=\max(j_i, i=0,1,.....n-3$$

其中，j_k是在高度为$y=i$处的步长宽度，由于$d_i > j_i$,这样有：

引理4

给定三角剖分$\tau\in T_n, \Delta_n(\tau)\ge S_n(p(\tau))$

定理4说明：步长宽度的下限，意味着最大度数的下限。

λ_n在树中的含义是：从构造$b(\tau)$的过程可知，在树中的任意一个内节点（除树根外）严格对应一个凸多边形$v_i,......v_j$ $i<j$，因此,$\|v_i v_j\|$对应于以此内节点为根的子树的外节点树，给定一棵树$b\in B_n$记它的非根内节点v_i并定义$\|v_i\|$为以v_i为根节点子树中所有的外节点数，称之为“近一半度量”

$$H_n(b)=\max(\min(\|v_i\|, n-\|v_i\|) \qquad i=1,......,n-3$$

即包含不超过一半外节点的最大子树

$$\lambda_n(\tau)=H_n(b(\tau))$$

四、证明

使用的基本定理是投票箱定理，该定理说明：

从（0，0）出发，向右走 I 单元，向上走 j<=I 单元，并保证 y<=x 的网络路径数是：

$$N_{ij}=\frac{i+1-j}{i+1+j}\binom{i+1+j}{j}$$

1、引理1证明：

因为度数分布是相同的，因此仅需考虑v_0若$v_0=k$，其对应路径为从（1,0）开始经过（$k+1,0$)，然后是（$k+1,1$)，最后到达（$n-2,n-2$)，从（$k+1,1$)到（$n-2,n-2$)的路径数为：

$$N=\frac{k+1}{2n-5-k}\binom{2n-5-k}{n-3}$$

由于从（1,0）到（$k+1,0$)只有一条路径，所以N也是所有路径数，所以

$$prob(d_0=k)=N/C_{n-2}=\frac{k+1}{2n-5-k}\binom{2n-5-k}{n-2}/(\frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2})=$$

$$\frac{k+1}{2}\binom{n-1}{2n-5}\prod_{i=1}^{k}\frac{n-2-i}{2n-5-i}$$

2、定理1证明

分2步证明，首先确定k值，以使$prob(\Delta_n\geq k)\to 0$

注意到$prob(\Delta_n\geq k)=prob(\bigcup_{i=0}^{n-1}\{d_i\geq k\})$根据$Bonferroni$不等式，它的上限为

$n\Pr ob(d_0\geq k)$,从引理可以得到$\Pr ob(\Delta_n\geq k)\leq n(k+1)2^{-k}$

当$k\geq\log n+c\log\log n \qquad c>1$时，$n(k+1)2^{-k}\to 0$

即$\Pr ob(\Delta_n\geq k)\to 0$

3、引理5及证明：任意$c>0, prob(\Delta_n\leq k)\to 0 \qquad$ 若$k\leq\log n-(1+c)\log\log n$

由引理4可知，Δ_n比最大水平步长要大，因此，在相应的路径上，仅需确定k,以使的$prob(\Delta_n\leq k)\leq prob(S_n(P(\tau)\leq k)\to 0$

假设$U_1.......U_{2n-4}$是一系列[0,1]之间的平均分布变量，从（1,0）=（x_0,y_0)开始，在C_{n-2}中，有C_{n-3}通过（1,1），其余的路径通过（2,0）。所以（x_1,y_1)=（1,1）或（2,0）现在假设$(x_m,y_m)=(i,j)$是路径上的一个点（经过$m=i+j$步后），由投票箱原理可知，从(i,j)到$(n-2,n-2)$的路径有：

$$N_{ij}=\frac{i-j+1}{2n-3-i-j}\binom{2n-3-i-j}{n-1-j}$$

其中通过$(i+1,j)$的路径$N_{i+1,j}$的概率为：

$$P_m=\frac{N_{i+1,j}}{N_{i,j}}=\left(\frac{i+2-j}{i+1-j}\right)\left(\frac{n-2-i}{2n-4-i-j}\right)$$

显然当$i=n-2$时为0，$i=j$为1

如果定义 $x_{m+1}=x_m+I_{[U_{m+1}<P_m]}$ $y_{m+1}=y_m+(1-I_{[U_{m+1}\le P_m]})$

从(i,j)到（x_m+1,y_m)或(x_m,y_m+1)沿着正确的概率行进，设 $m=i+\Delta\ -1$

则

$$P_m=\left(\frac{i+2-j}{i+1-j}\right)\left(\frac{n-2-i}{2n-4-i-j}\right)\ge\frac{1}{2}(1-\frac{1+m-2j}{2n-5-m})\ge\frac{1}{2}(1-\frac{1+m}{2n-5-m})$$

$$\ge\frac{1}{2}(1-\frac{1+m^*}{2n-5-m^*})$$

其中，$m^*>m,$是所走步数的限制

若取$m^*=n/(2\log n)$ $p=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3\log n})$

则 当n足够大时$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1+m^*}{2n-5-m^*}\right)\ge p$

考虑到$Bernoulli$序列Z_1Z_2.....其中$Z_i=I_{[U_i\le p]}$ $1\le i\le m^*$假设L_1L_2......
是连续的“1”的个数，并且$Z_j=0$都终止这样的连续的1‘1’序列。

因为$I_{[u_j>p]}$意味$Z_j=0,\Delta_n\ge\max L_i$ $i\le m^*$所以，

$$prob(\Delta_n<k)\le\bigcap_{i\le m^*/3}(L_i<k)=[prob(L_i<k)]^{m^*/3}\le(1-p^k)^{m^*/3}$$

$$\le e^{-p^k m^*/3}=e^{-r(\log n)^c}\qquad r>0\text{常数}$$

由于$prob(\Delta_n\ge k)\to 0$ $prob(\Delta_n\le k)\to 0$所以
$prob(\Delta_n=k)\to 1$

4、引理2证明

设$\lambda_n = k$,现在对满足这一条件的三角剖分进行计数　　注意到

在T_n中有$C_{k-1}C_{i-k-1}C_{n-i-1}$三角剖分，这些三角剖分包含三角形$\Delta v_0 v_k v_i$

$i > k$。由于$\lambda_n = k$,不妨假设$v_0 v_k$的长度是k,v_i是Δ的一个顶点。又由于当

$n-k \le i \le 2k$时,$\|v_0 v_i\|$和$\|v_i v_k\|$均不超过k,因此，满足条件的三角剖分个数

为$\sum_{i=n-k}^{2k} C_{k-1}C_{i-k-1}C_{n-i-1}$,考虑到$v_1 v_{k+1}, v_2 v_{k+2} ..... v_{n-1} v_{k-1}$共$n$种情况，所以上述总

的个数是$n\sum_{i=n-k}^{2k} C_{k-1}C_{i-k-1}C_{n-i-1}$。当$i = 2k$或$i = n-k$时，则有2条边等于$k$，因此

上述计数在此情况下，应乘以$1/2$，当$3k = n$时，有3边等于k，则应乘以$1/3$

5、定理2证明

注意到

$$\sum_{i=n-k}^{2k} C_{k-1}C_{i-k-1}C_{n-i-1} = \frac{(n-2k)(3k-1-n)}{(n-k)(n-k-1)(2n-4k-1)}\binom{2k}{k}\binom{2n-4k}{n-2k}$$

上式乘nC_{k-1}/C_{n-2}以近似为$\binom{2m}{m} * 4^m / \sqrt{\pi m}$

并且当k和$n \to \infty, \frac{k}{n} = x \to (1/3, 1/2)$时，$w(x)$为上式的极限

$$\alpha = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} x w(x) d_x$$

五、结论

我们三人经过近一个星期的努力，终于把该项目作完了。这里我们要感谢邓俊辉老师，从他精心讲授的“计算几何”的课程里，我们学会了很多解决问题的方法。通过做课题，

我们对计算几何的研究问题的方法有了更进一步的认识。尤其是：在本论文中，作者通过建立与三角剖分对应的网格路径，并用概率论的知识对网格路径进行分析，从而达到分析随机三角剖分的目的，这种方法在今后的工作和学习中一定可以用到。

作本课题的另一个收益就是：通过做课题，增强了我们合作的精神。这也许是很重要的素质。

课题虽然已经完成，但有的地方还不是很完善，但仍然可以进行改进。如 Rand_max_diag 算法任没有一个线性算法。我们开始认为，它不存在线性算法，但不能从理论上加以证明，后来通过大家的讨论，还是实现了线形算法。通过我们的不断努力，我们以后也许会找到真正的答案。