

火腿三明治定理

一、合作者

交叉研 3 2013311388 傅昊 15210588664

交叉研 3 2013311390 刘艺成

交叉研 3 2013211590 蒋译瑶

二、简述

火腿三明治定理（或称为 Stone-Tukey 定理）在三维的情况下，可以表达为：任意给定一个火腿三明治，总有一刀能把它切开，使得火腿、奶酪和面包片恰好都被分成两等份。[1] 可以扩展到 n 维的情况：如果在 n 维空间中有 n 个物体，那么总存在一个 $n - 1$ 维的超平面，它能把每个物体都分成“体积”相等的两份。[2]

三、演示

我们简化了问题，仅考虑在二维平面下的情况。即：给出 n 个红点， m 个蓝点，做出一条直线，使得直线两边的红点和蓝点数量均被平分。[3]

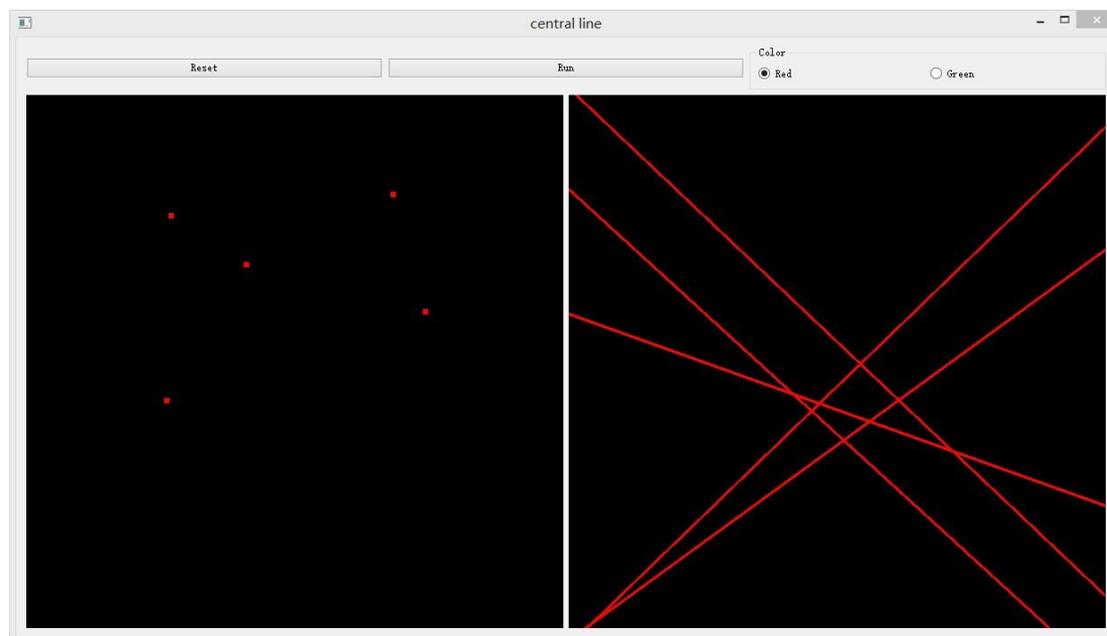
通过 python QT 完成的演示界面。

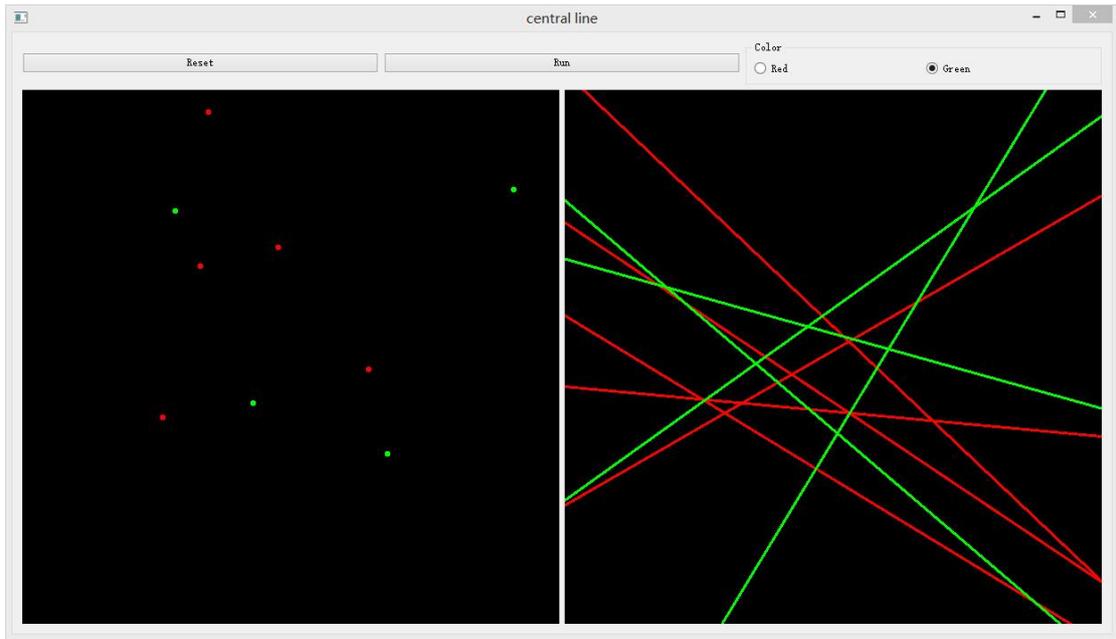
核心部分：对偶问题的直线平分由 C++完成。

四、算法简述

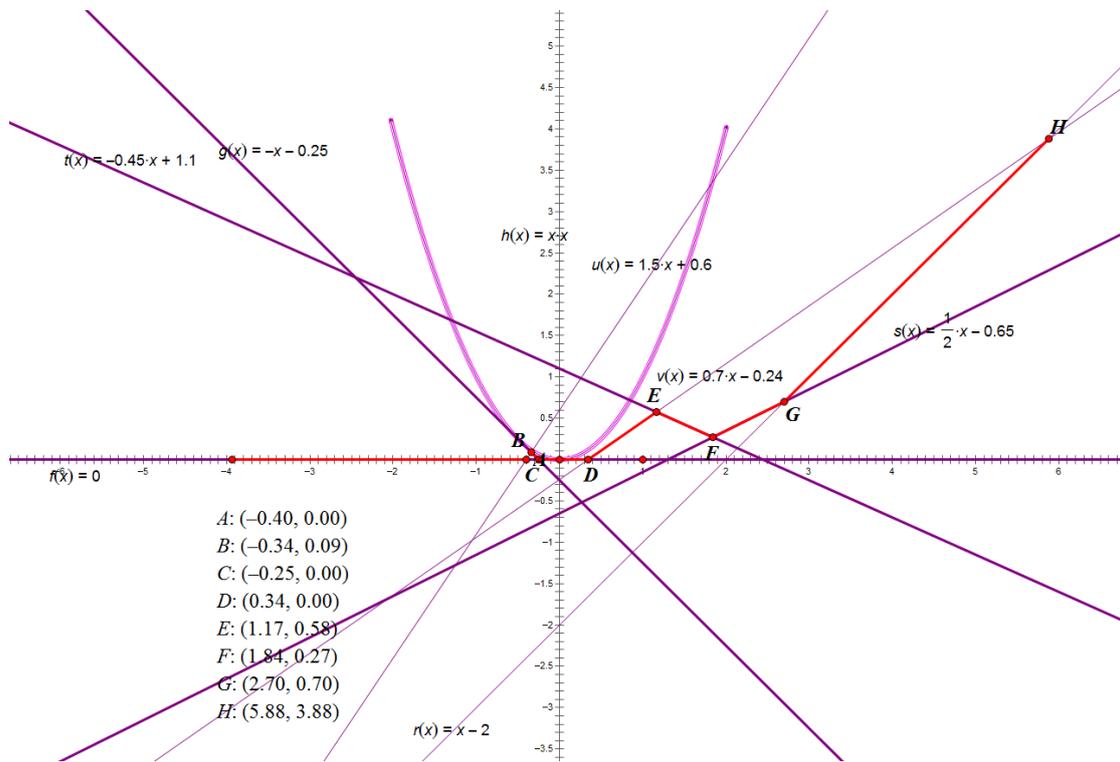
1、在二维的情况下，通过对偶的方法（duality），使原来的点平分问题转化为：把直线分成上下两部分的问题。

确切说：在原问题的一个点： (x_0, y_0) ，将通过抛物线： $y=x^2$ 的映射，变为直线： $y=2x_0x-y_0$



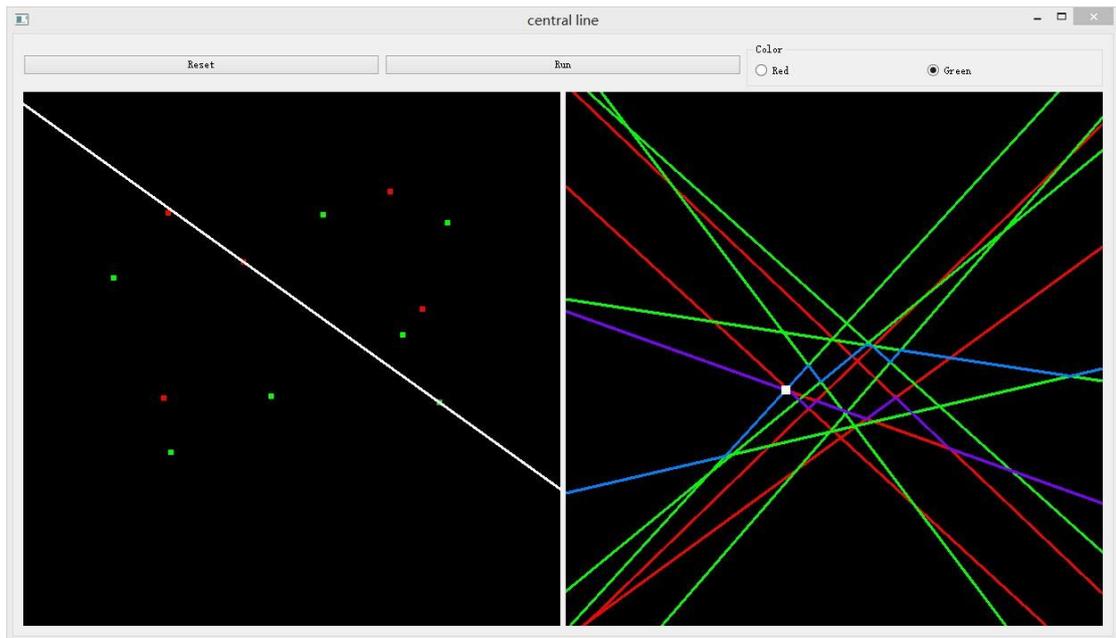


2、然后固定红色，找出对偶问题里，红色直线的平分区间。这些平分区间由直线编号组成，每一次转换意味着在对偶问题中的一次直线相交。同样固定蓝色，找到对偶问题里，蓝色直线的平分区间。



3、再由红蓝两个平分区间相交，得到至少一个交点。

4、最后将此对偶问题得到的交点返回到原问题的直线上去。此时得到的直线就能将平面上的红蓝点都平分成两半。



五、分析

注意到，算法的重点是四/2，如何找出对偶问题里，固定一种颜色后，对应的所有直线的平分区间。这里是用 c++ 完成的代码。

具体算法：

- 1、从最左端无穷远处，找出位于中间的直线编号。
- 2、不断向右侧走，每次与别的直线相交时，根据相交方向，确定是沿另外那条直线向上，还是向下。
- 3、直到最右端的无穷远处。

六、推广

Red-Blue Matching 问题，即给定平面上 n 个红点和 n 个蓝点，求出一个 n 条连接一个蓝点一个红点的匹配，使得所有这些线段都不相交。只需要通过算法的前半部分，每次将两种点都不断平分即可。

这部分没有完成演示。

七、参考文献

- [1] Steinhaus, Hugo (1938), "A note on the ham sandwich theorem", *Mathesis Polska* 9: 26–28.
- [2] Stone, A. H.; Tukey, J. W. (1942), "Generalized "sandwich" theorems", *Duke Mathematical Journal* 9: 356–359, doi:10.1215/S0012-7094-42-00925-6
- [3] Megiddo, Nimrod (1985), "Partitioning with two lines in the plane", *Journal of Algorithms* 6: 430–433, doi:10.1016/0196-6774(85)90011-2.