

寻找凸多边形中最大面积平行四边形

王冠宇 陈锦标 顾颖媛

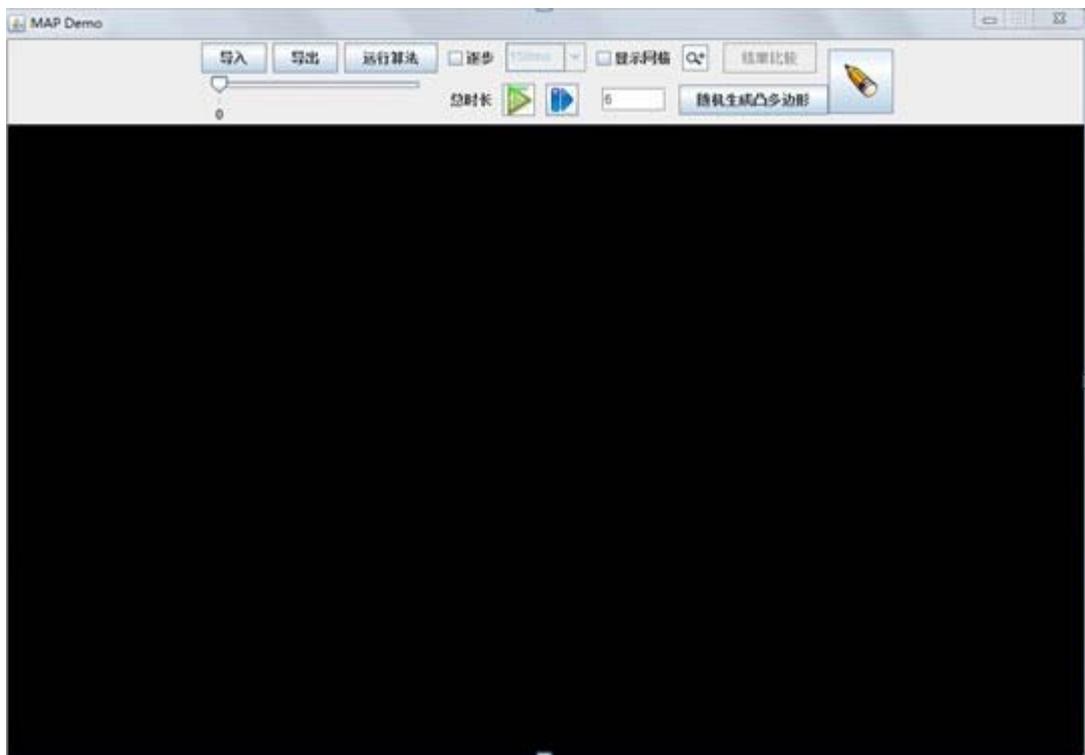
1. 程序简介与下载

本组的实验题目为“寻找凸多边形中最大面积平行四边形”，在给定的凸多边形中找出面积最大的平行四边形，这个平行四边形是内接于凸多边形的，平行四边形的四个顶点在凸多边形的边界上。如果用最简单的直接求解的方法，这个问题的时间复杂度是 $O(n^4)$ 的。采用我们所使用的算法，可以将复杂度降至 $O(n^3)O(n^2)$ 。我们参考并实现了Kai Jin在论文“Finding the Maximum Area Parallelogram in a Convex Polygon”中提出的算法，并完成了算法的演示Demo。算法核心由Java编写，以Java Swing形式实现，程序的运行需要。下面提供了本程序的下载，欢迎大家测试。

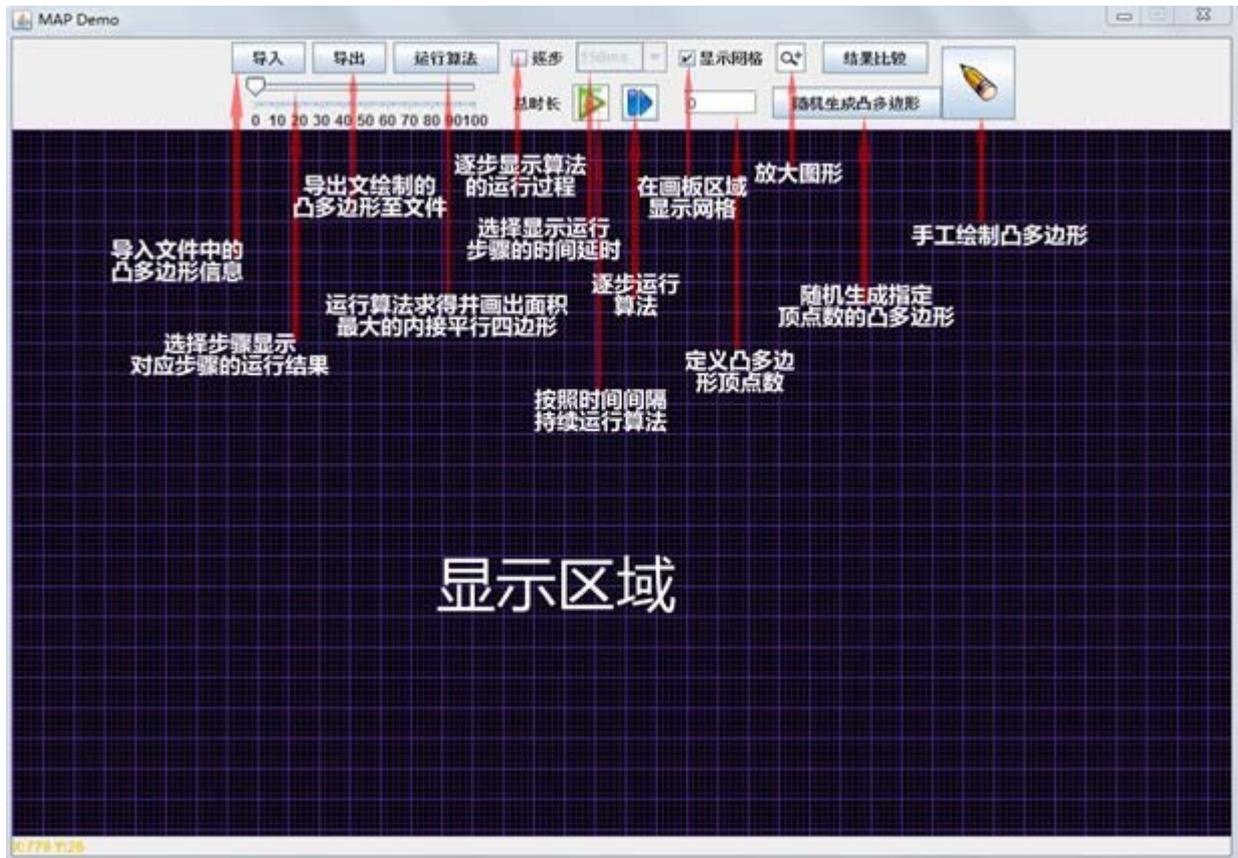
[程序下载](#)

2. 程序使用说明

程序界面：



界面功能布局：



功能说明：

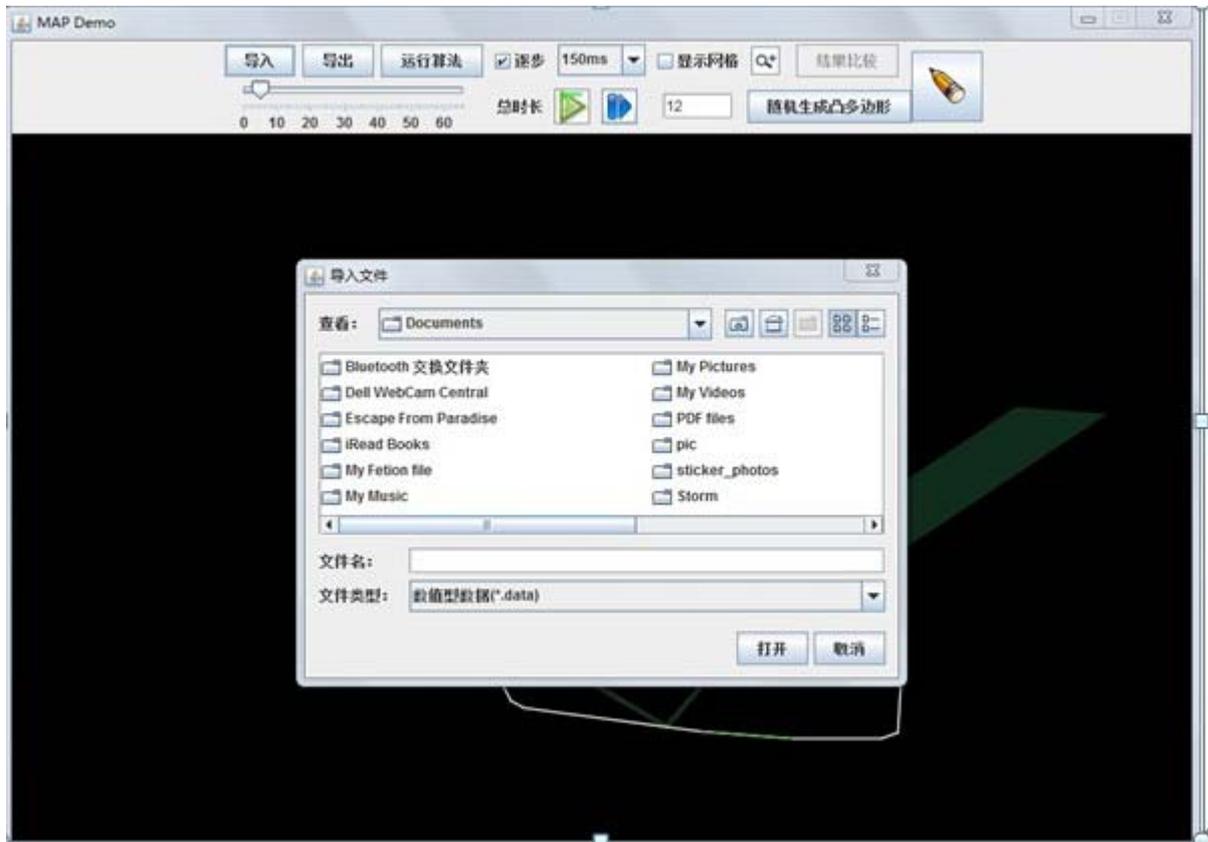
- 导入存储凸多边形信息的文件
- 导出凸多边形信息至文件
- 随机生成指定顶点数目的凸多边形
- 人工绘制凸多边形
- 显示网格
- 执行算法并显示结果和运行时间
- 逐步执行算法显示执行结果(凸多边形顶点数小于50时可使用)
- 选择延时时间
- 持续或逐步运行算法

使用方法

1. 定义凸多边形

3种方式分别为

- 从文件导入凸多边形



导入文件类型为data. Data文件按逆时针顺序存储凸多边形顶点，第一行记录顶点数目，第二起每行记录顶点的横纵坐标

0 点数

1 x1 y1

2 x2 y2

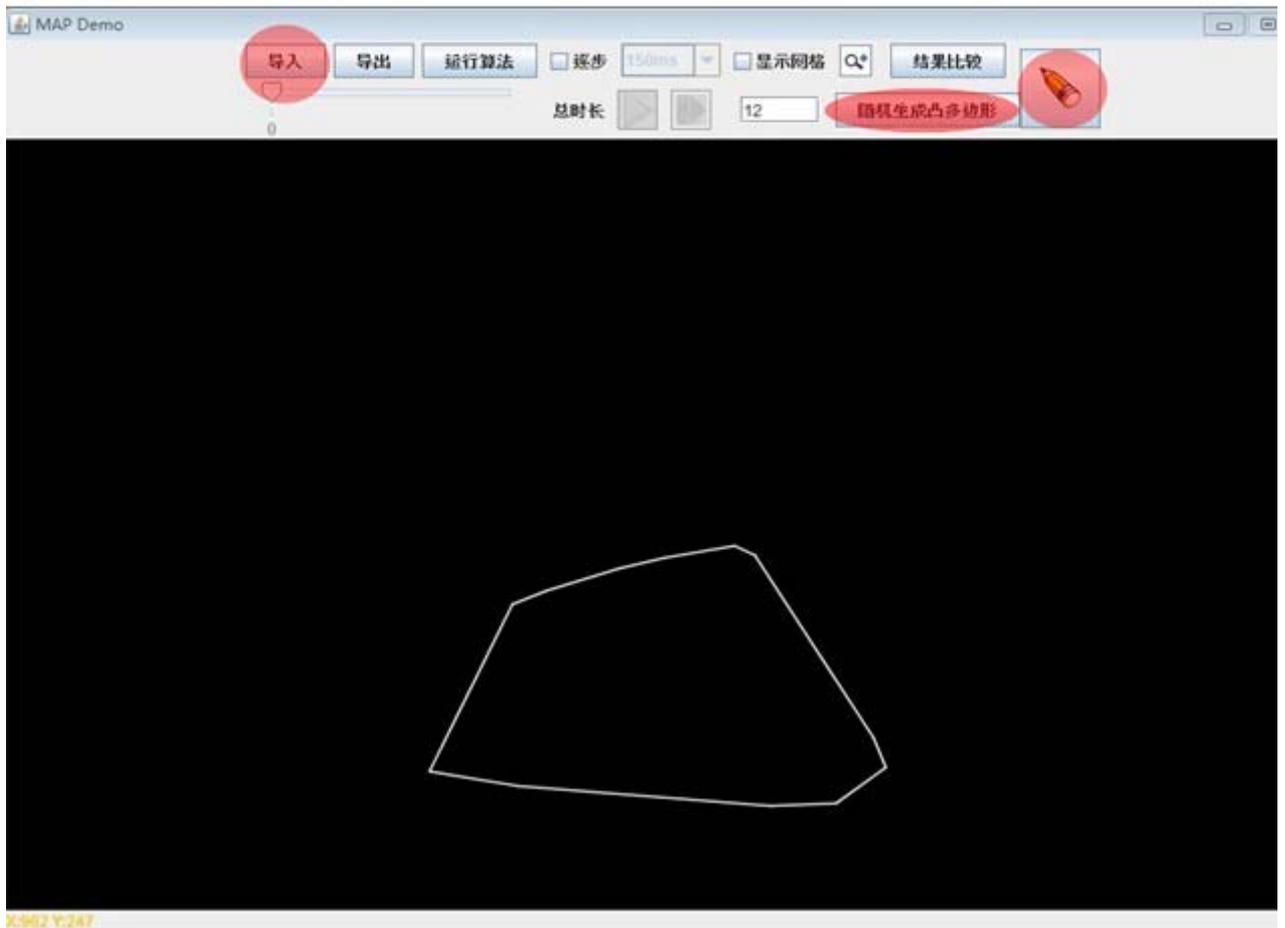
3 x3 y3

...

- 指定顶点数目随机生成凸多边形

10 随机生成凸多边形

在框中填写要生成的凸多边形的顶点数，而后点击随机生成按钮，在显示区自动生成凸多边形

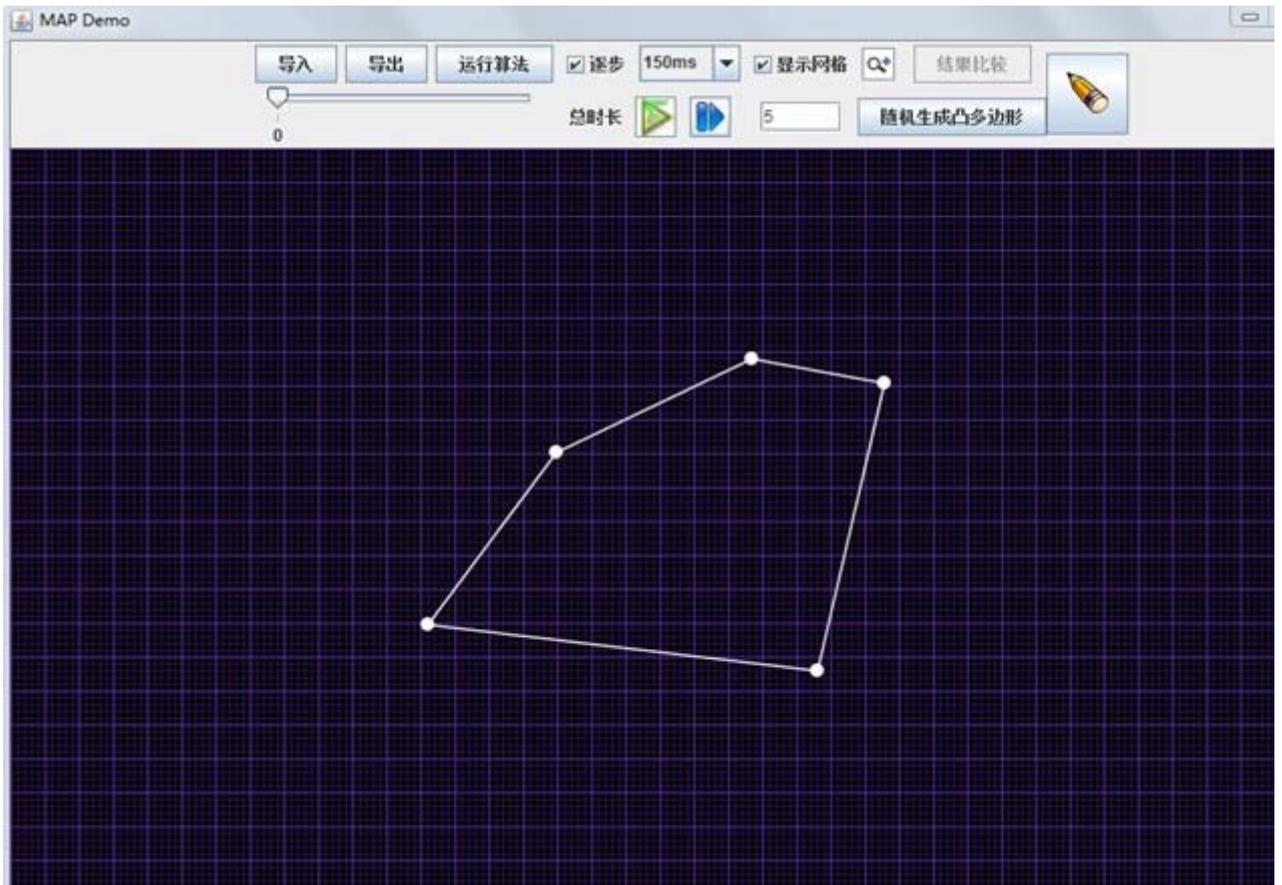


• 人工绘制凸多边形

可以勾选显示网格选项 显示网格，显示区出现网格线，用于辅助绘图

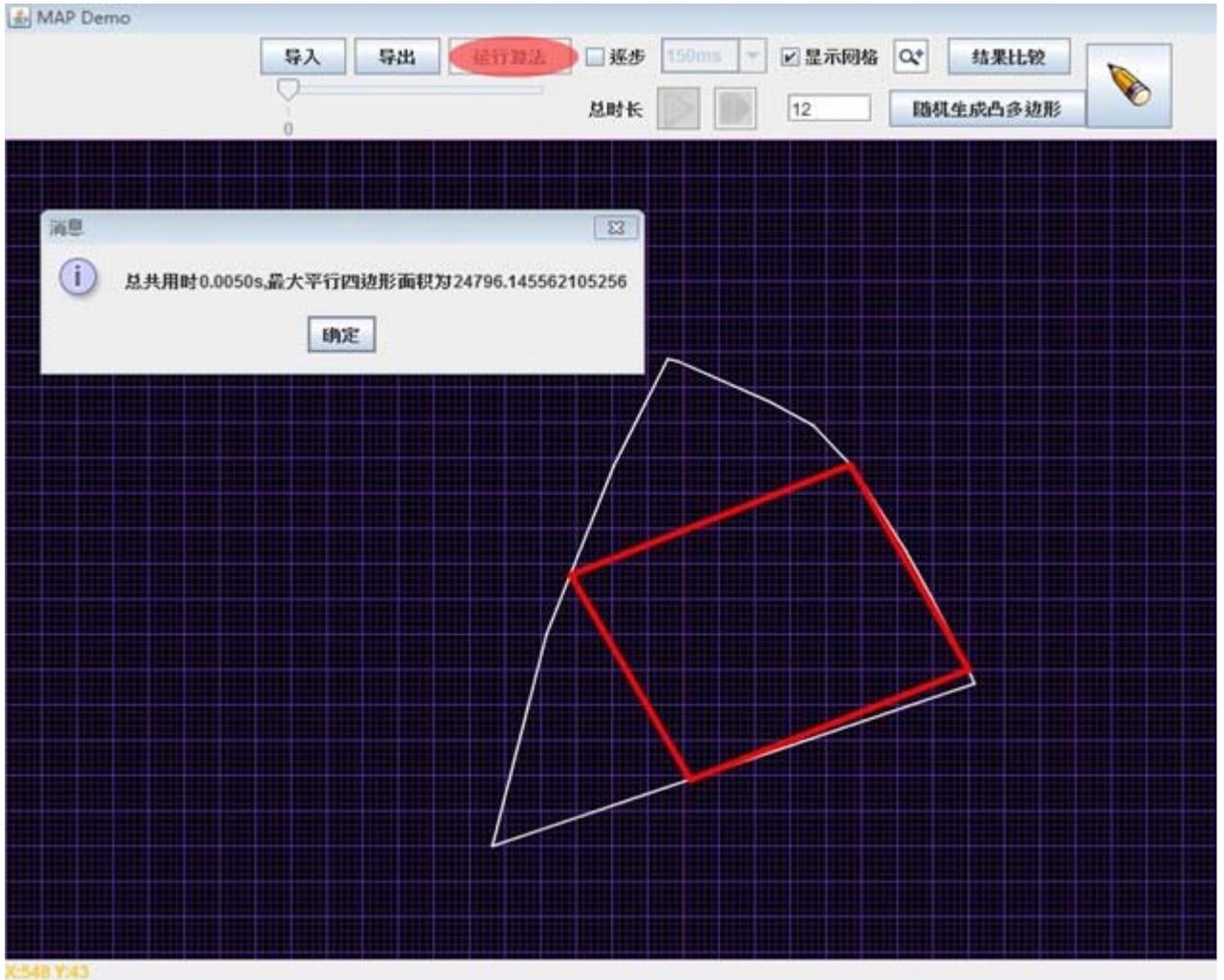


点击画笔，在显示区按逆时针方向选点



2. 直接运行算法显示结果

直接点击运行算法 **运行算法** ，如下图显示结果，包括画出面积最大的的平行四边形并显示运行时间和平行四边形面积

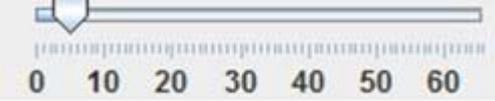


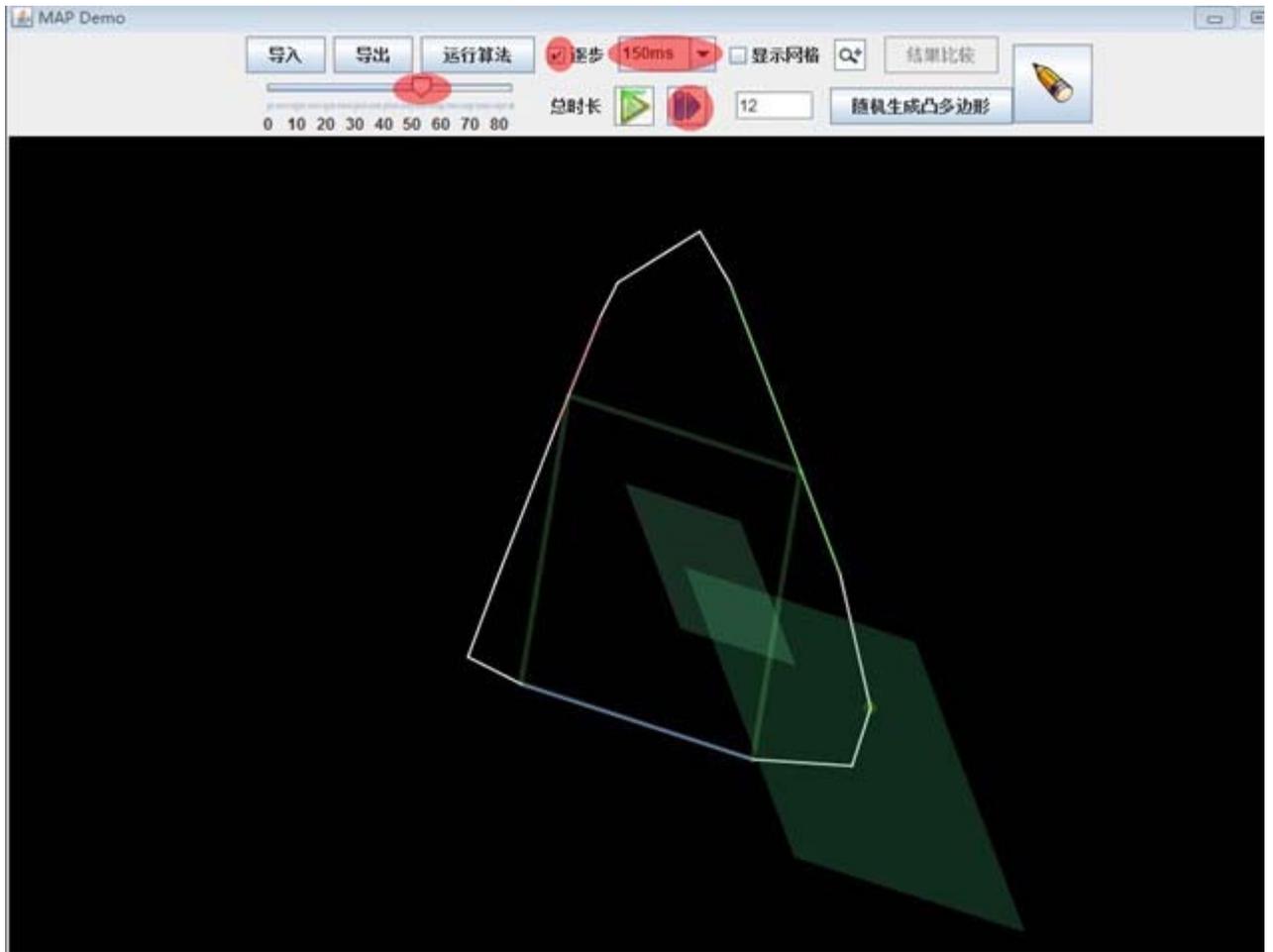
3. 逐步运行算法显示结果

勾选“逐步” 逐步 150ms 选择延迟时间

点击绿色的持续运行程序按钮  将按照延迟时间逐步显示运行结果

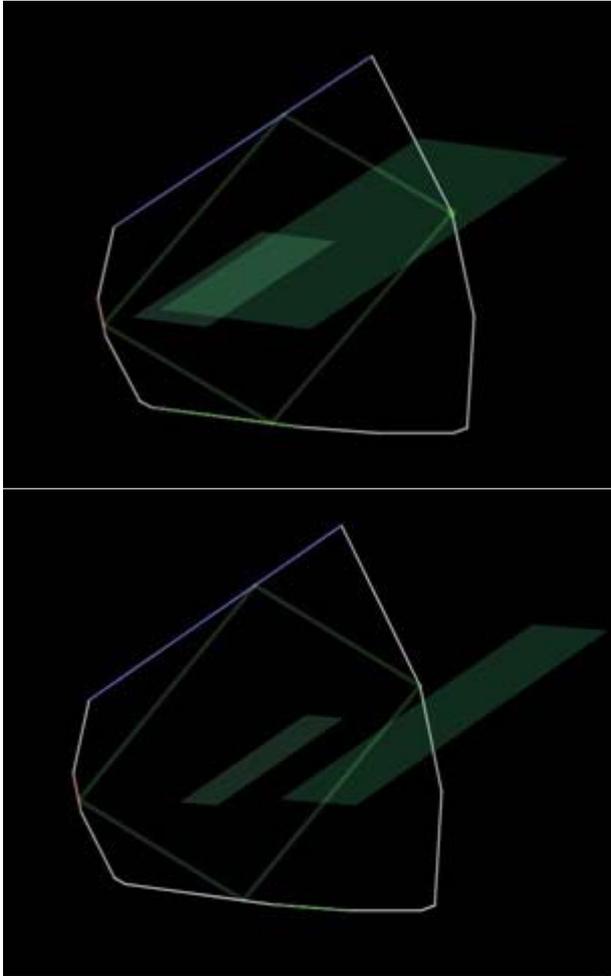
点击下一步按钮  则显示下一步的运行结果

进度条的刻度为步数可选择要跳转到的步骤 



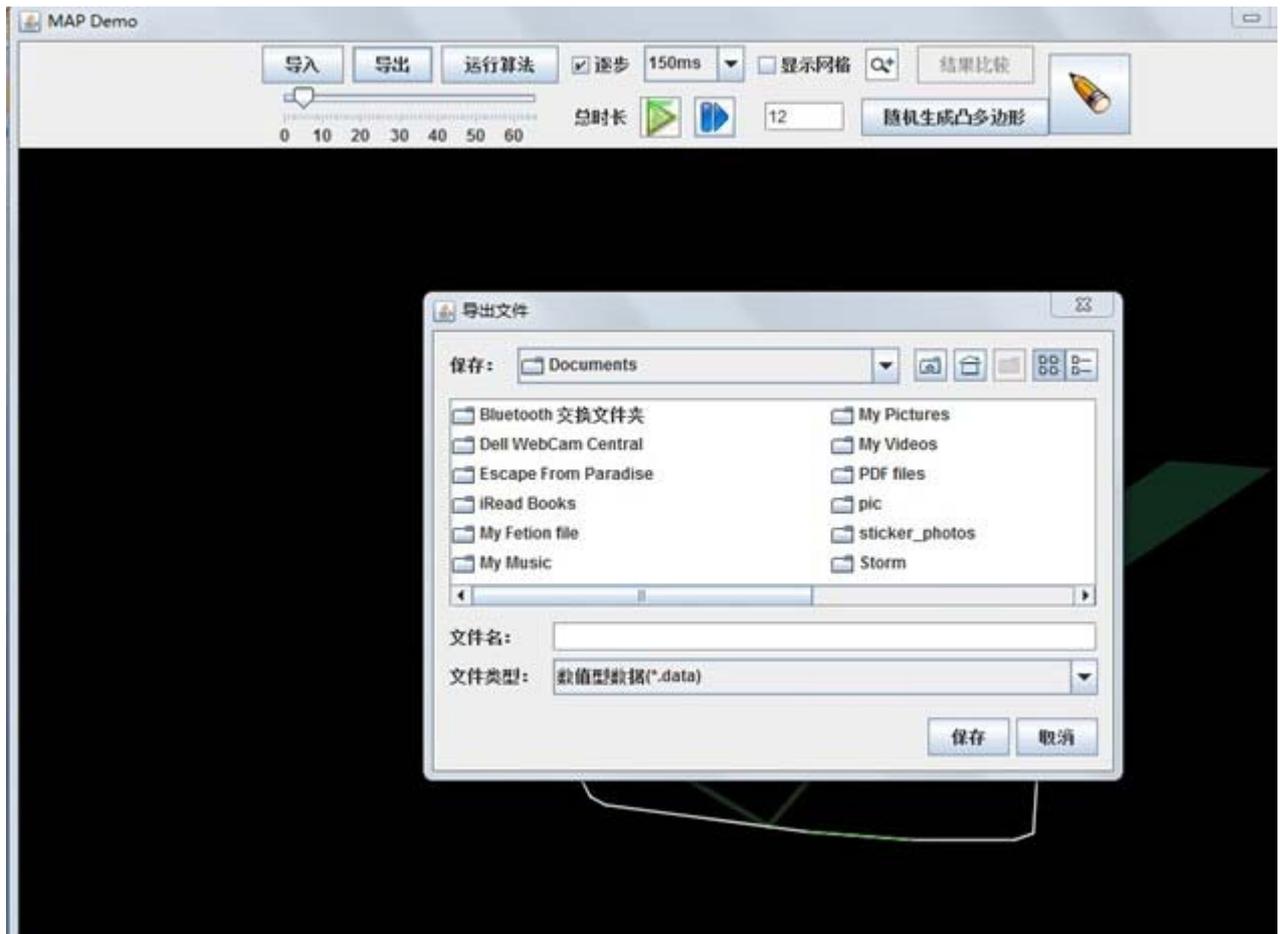
逐步演示功能
当前算法执行状态

下一步



4. 导出文件

以Data文件类型导出凸多边形



3. 算法介绍

3.1 预备知识

下面说明本算法相关的定义和引理。

定义1: 我们定义平行四边形内接于多边形 P ，当且仅当平行四边形的四个顶点都在 P 的边界上

引理1: 多边形 P 内面积最大的平行四边形必定是 P 的内接平行四边形

引理2: 给定两条不平行直线 b, b' 以及点 E , 必定存在一条连接直线 b 和 b' 的线段使得线段中点为 E 。见图1

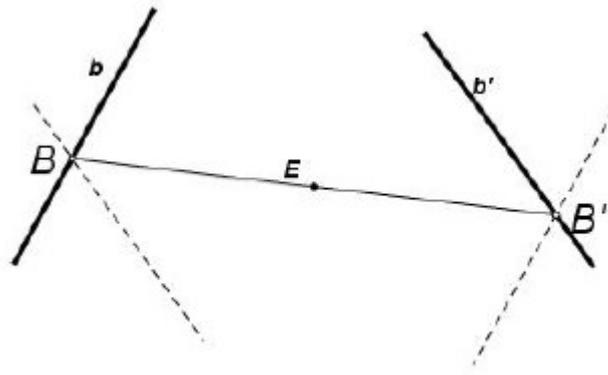


图1

考虑平行四边形Q, 由于其中心E是对角线BB'的中点, 根据引理2, 如果已知中心E的位置和点B和B'所在两条边b, b', 就可得B和B'的精确位置。

引理3: 双曲线引理。假设非平行直线b, b' 相交于原点0, 2条双曲线h1, h2都以b, b' 为渐近线。那么, 所有内接于这四条曲线的平行四边形的面积相同。

如图2, 平行四边形四个顶点A, B, A', B' 分别在h1, b, h2, b' 上。

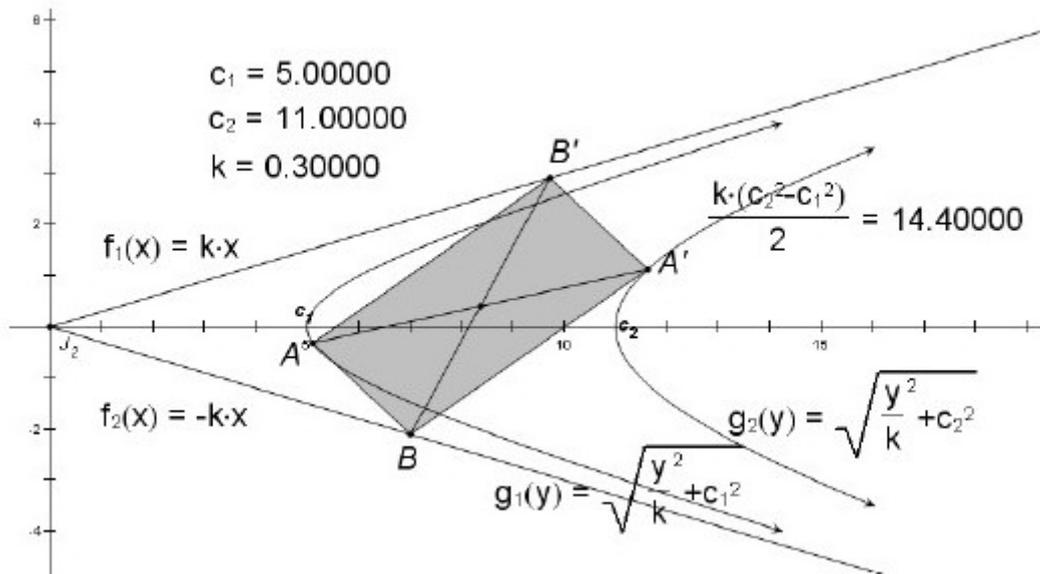


图2

要证明引理3, 则只需证明b和b' 垂直时的情况即可即可, 其他情况类似。

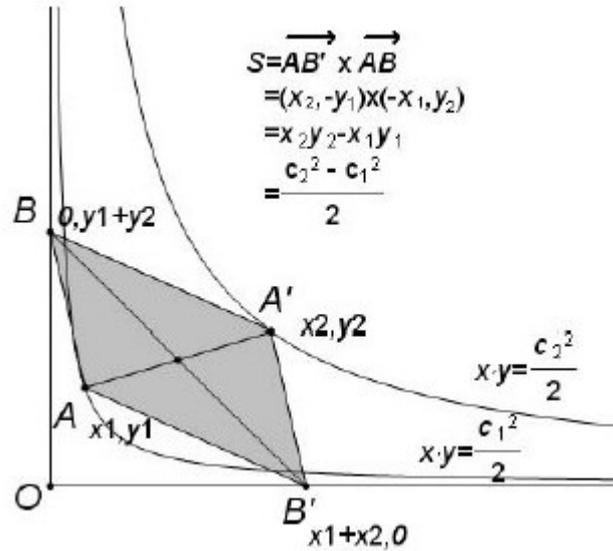


图3

建立一个以0为原点的笛卡尔坐标系，另b和b'分别为x轴和y轴。假设A, A'的坐标分别为(x1, y1) (x2, y2). 那么E点的坐标确定，根据引理2, B, B'点的坐标为(0, y1+y2) (x1+x2, 0)。那么平行四边形Q的面积为x1y2-x1y1。根据h1, h2渐进于b, b'的假设，存在常量C1, C2使得x1y1=C1²/2, x2y2=C2²/2, 其中C1, C2是双曲线h1, h2顶点到原点0的距离。因此平行四边形Q的面积C2²/2- C1²/2是常数。

根据引理3可知，当b, b'确定时，如果想使得平行四边形Q的面积最大，只需要使C1尽可能小和C2尽可能大即可。也就是说，我们在P上选取点A'使得CA'最大，选取点A使得CA最小。这里的CA最小表示双曲线hA（经过点A且渐进于b, b'的唯一双曲线）的顶点到原点的距离。

推论：假设相对顶点B, B'分别在直线b, b'上，那么

- 1. A是P的一个顶点
- 2. 如果A'不是P的顶点。假设a', b相交于点X, a', b'相交于点Y. M是XY的中点。我们可以通过证明CM=max {CN | N∈XY} 来证明A' =M

定义2：我们把至少有一个顶点落在多边形P的顶点上的平行四边形叫做固定平行四边形。

由推论得：P存在一个内接的面积等于MAP面积的固定平行四边形。

3.2 算法说明

首先根据上述引理和定义，给出一种复杂度为O(n³)的算法

输入：凸多边形P

输出：P的面积最大内接固定平行四边形

算法：

```

1  Foreach  $b \in P, b' \in P$  do
2      Foreach  $a' \in P$  do
3          Let  $a'$  与  $b$  相交于  $X, a', b'$  相交于  $Y$ 
4          Let  $M$  是  $XY$  的中点
5          If  $C_M > C_A$  Then  $A' = M$ 
6      EndFor
7      在  $P$  上寻找使得  $C_A$  最小的点  $A$ ;
8       $E$  是  $AA'$  的中点, 计算  $B, B'$ 
9      If 平行四边形  $ABA'B'$  的面积  $> Q$  的面积 Then  $Q$  更新为  $ABA'B'$ 
10 EndFor
    
```

其中红色标识的步骤2-7求得对当前 b, b' ，求出使得 CA' 最大的点 A ，蓝色标识的步骤7，求出使得 CA 最小的点 A ，步骤8根据 A 和 A' 计算出 B, B' ，步骤9计算

新的平行四边形 $ABA'B'$ 的面积与当前最大面积的平行四边形面积进行比较，如果 $ABA'B'$ 的面积更大，则更新 Q 为 $ABA'B'$ 。具体计算方法如下图。易求得

点 A, A' 以及中点 E ，图中 $B_1B_2B_3B_4$ 分别为线段从 P 中选取的边 b, b' 的端点，直线 b, b' 的交点为 O, M_1, M_2, M_3, M_4 分别为 OB_1, OB_2, OB_3, OB_4 的中点，经过

M_1 与 M_2 与 b' 平行的直线与经过 M_3, M_4 与 b 平行的直线相交如图4中左侧的小平行四边形，对该平行四边形进行放大一倍得图4中右侧所示，考察凸多边形 P 落在放

大后的平行四边形内的顶点，求出 B 和 B' 。

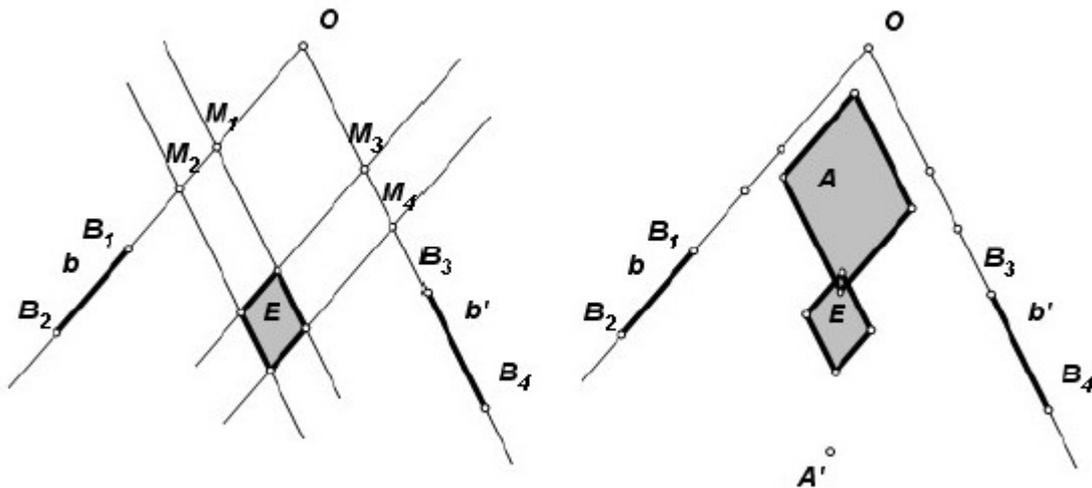


图4

利用Rotating Technique改进算法

上述算法中，对每对 (b, b') 计算最大平行四边形耗时 $O(n)$ ，实际上，对于给定边 b ，我们可以选取这样的对 (b, b_1') ， (b, b_2') ， (b, b_3') ， \dots ，序列

$b_1', b_2', b_3' \dots$ 沿着凸多边形的边界移动。根据这种方法，对于所有包含这条给定 b 的对 (b, b') ，以 $O(n)$ 的复杂度计算出对应的最大平行四边形，算

法的总体复杂度降低由 $O(n^3)$ 降低到 $O(n^2)$. 该方法如图5所示。

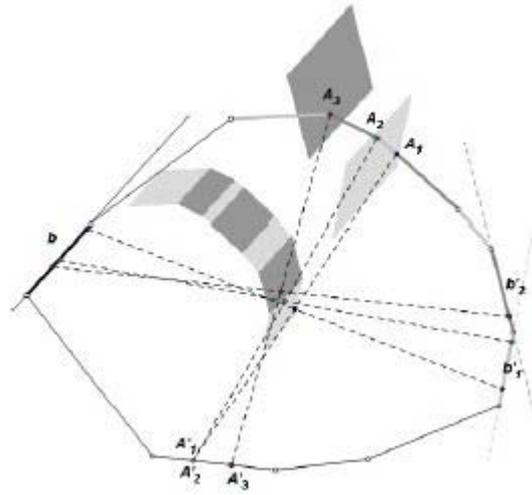


图5

4. 实验报告下载

[点击这里下载](#)

5. 关于我们

王冠宇 wgiveny@gmail.com

陈锦标 cjb06@mails.tsinghua.edu.cn

顾颖媛 gyymay@gmail.com