

计算几何课程设计报告

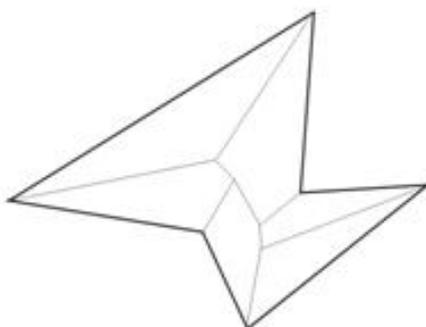
基于 Voronoi 图的

简单多边形骨架提取

引言

骨架 (Skeleton) 又称中轴 (Medial Axis), 通常使用烧草模型和最大球 (圆) 模型来描述。骨架有着与原物体相同的拓扑和形状信息, 是一种性能优良的几何特征, 能够有效的描述物体, 因此, 在物体识别、路径规划、医学工程等领域多有应用。在物体识别等应用领域里, 骨架提取的输入可以看作是空间内的点构成的多边形, 对于多边形的骨架提取也成为了这些应用的基本技术, 具有重要的应用意义。在此次课程设计中, 我们实现了基于Voronoi图的任意多边形的骨架提取, 并提供了多边形骨架提取的演示界面。

多边形骨架



一个多边形的骨架, 如上图所示, 可以看作是由无数点对之间的骨架点组成的。两点间的骨架 (skeleton) (等同于对中轴 (medial axis) 的求取) 是到两点距离相等的点的轨迹, 它是两点连线的垂直平分线, 每一点所邻接的半平面是到其距离最小的点集相应地可扩展为离散点集的中轴定义。它是下列性质点的轨迹: 其上任一点到最近两离散点距离相等, 相应地也产生各点到其距离最小的点集; 两线间的中轴是到两线距离相等的点的轨迹, 它在两线相交时为角平分线——两线平行时为到两线距离——的平行线, 每一线所邻接并以中轴为界的区域是到其距离最小的点集。一线和一点间的中轴是到该点 (线) 距离相等的点的轨迹, 它是以该点为焦点、该线为准线的抛物线。该点或线所邻接并以中轴为界的区域是到其距离最小的点集。

多边形骨架的几何算法

多边形骨架 (中轴) 的几何算法, 是由多边形的某一点开始, 找出参与中轴线计算的相应的线段与线段、点与线段、点与点, 实质都转化为求某个特定点 (中轴转折点) 的问题,

因此也就是找点对序列的方法，基本的多边形骨架抽取的数据组织和算法梗概如下：

从数据结构的组织上讲：实际多边形的中轴是一个多层次的环、树结构，且层次是不能限制的。尽管一个多边形总是确定的、有限的，但复杂的多边形结构的复杂程度很难事先洞察，其各层次都可以生长，结构不定，数据组织困难，算法也困难。另一方面，复杂多边形结构的复杂程度往往本身就是一个研究分析对象，需要一个智能机来解决，因此，统一的数据组织十分困难。在简单的情况下，可以给出单连通域下的多边形数据结构，连通域为多边形内部，多连通需按理类推。为阐述方便，引入以下概念：

(1) 多边形起始中轴线段：过一多边形的每一个凸的顶点都可作顶点角（小于等于180度）的角平分线，它终止于与其角两边线段中短边的垂线交点或相邻凸顶点的角平分线交点。

(2) 对岸线、点：上述射线两侧的边、点或与之正向（与射线同向）顺序邻接的边、点互称岸线及对岸线、点。有时，对岸线、点一方不仅有一方对应，而有两方或多方对应，运算中有多方的动态相对关系。

(3) 线段耗光：该岸线线段的全部有序点集均找到相应对岸线的有序点集或节点作为对称，耗光过程中产生的中轴线段为前述基本概念中三类基本线段的某个有序组合。

(4) 顶点耗光：多边形的每一凹的顶点的顶点角（大于180度）的各方向线上均找到其对称的对岸线有序点集或节点，耗光过程中产生的中轴线段为前述基本概念中三类基本线段的某个有序组合。

这里所有的凸顶点不存在耗光问题，并且两相邻凸顶点间的线段也为耗光线段。这样，算法梗概为：首先，数字化轮廓点，顺序组织全部轮廓点为一个顺序的环；然后，把轮廓点按Delaunay原则三角化，去除不在连通域内的各三角形；接下来，从一个始节点开始，根据一条中轴线算法，按顺序动态地组织环上两旁的边运算，直至产生的一条中轴到达另一个始节点，或遇上另一条中轴，抹去该1个或2个始节点；最后，依次对未抹去的始节点按上一步实施，直至抹去所有始节点。

骨架与 Voronoi 图的关系

设点集合 $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}, n < \infty$,

$$V(p_i) = \{p | d(p, p_i) \leq d(p, p_j), i \neq j, j \in I_n\}, \quad (1)$$

式 (1) 给出了点P的Voronoi多边形，点集的Voronoi多边形集合就构成了P的Voronoi

图。得出以下结论：骨架及Voronoi图都基于最短距离约束，简单对象的骨架是其Voronoi图的一部分；骨架对边界的形状有很强的依赖性，Voronoi图不仅依赖边界的几何形状，还依赖于边界元素的区分以及定义；骨架只存在于图形的内部，Voronoi图存在于图形的内部和外部；骨架只存在于某些对象，Voronoi图具有普遍性。

Voronoi图的生成是一个由点到区域的扩张过程，骨架的提取是一个区域到线的细化过程，可以以火的蔓延为例分析假如在某一区域R中存在一点集，在 $t=0$ 时点燃集中的点。着火点以同样的速度向四周扩散，燃烧前沿相交时熄灭，燃烧区域对日的分割就是Voronoi分割。边界点具有特殊性，其燃烧前沿不能够完全相交，因此Voronoi图边界的多边形是无限向外扩展的。同理假如对某一区域边界线上的所有点在 $t=0$ 时点燃，火的前沿以相同的速度向内部扩散，燃烧前沿相遇时熄灭，火焰熄灭点的集合便是区域的骨架。随着研究的深入，Voronoi图的发生元已拓展到线、面等。并且从理论上人们已经得出了由直线段构成的凸多边形的Voronoi图和骨架线是相同的，直线段和圆弧构成的简单多边形的骨架是其Voronoi图的一部分的结论，而自由曲线情况比较复杂，它们之间没有必然的联系。但我们这次课程设计的主要对象是平面区域的人造多边形，所以基于上述理论分析，可以通过生成对象的Voronoi图提取骨架线。

基于 Voronoi 图和分治策略的骨架提取的实现

实验方案：

在本次课程设计中，我们的对多边形的骨架提取方法是基于多边形的边和凹点集合的Voronoi图的，求Voronoi图基于分治策略实现。

演示系统的实现流程图如下：

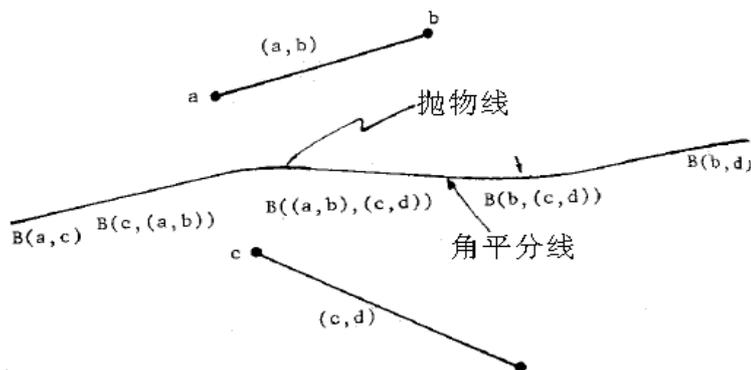


计算Voronoi图对点和边的分割：

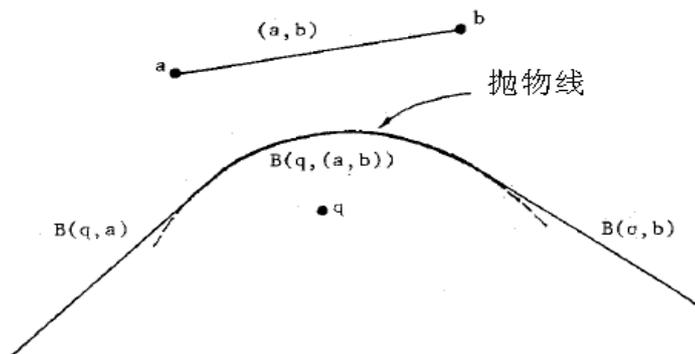
下图显示了两个边和一个点对一个边的情况。

在Voronoi图的实现中，我们在必要的场景下引入抛物线段来表示Voronoi图中的某些线段，抛物线上的点与该对的两侧——或者说两岸的边和点是真正意义上的平分线。

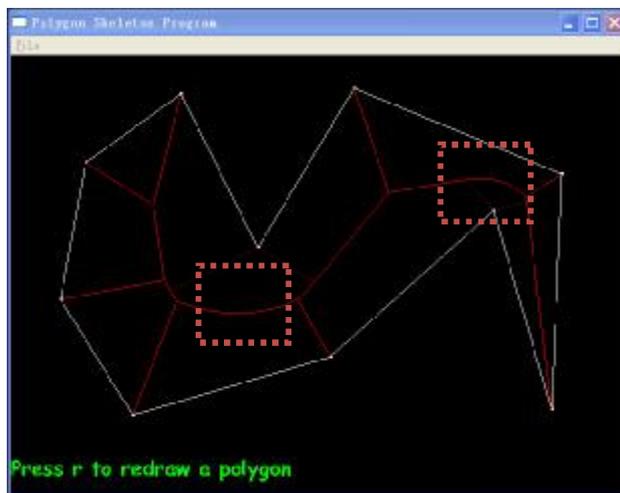
边对边：



点对边：

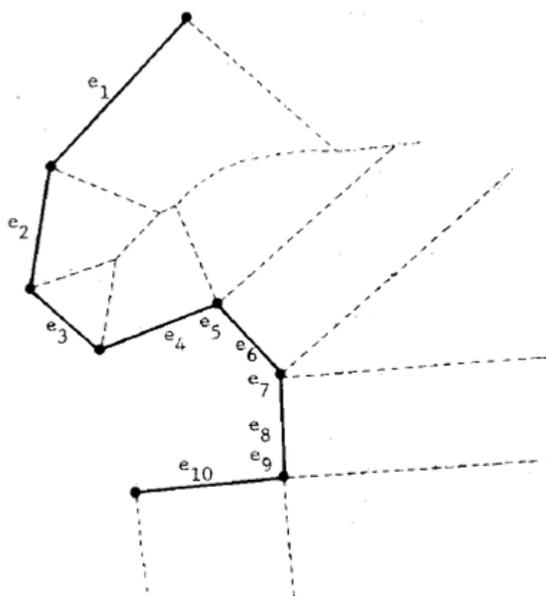


在我们的实验中，多次利用了这些方法进行了计算



然后,我们通过分治策略计算了简单多边形的Voronoi图,首先输入的一串顶点序列 $01, 02, 03, \dots, 0n$,每一个都是通过它的二维坐标来表示的。然后我们将这一串顶点分成 h 个链,然后对这 h 个链分别求取Voronoi图,然后通过二叉融合树,将这些Voronoi图融合成一张原完整的多边形的整体Voronoi图。这个图就是接下来进行骨架提取的关键部分。

下图就表示了对一个简单多边形中的一个点链提取的Voronoi图:(h 个链的连结就形成了最后的完整的Voronoi图)



然后通过判定顶点凹凸性的方法,把凹顶点所连结的备选骨架线删除,就得到了一个简单多边形的骨架,通过这个骨架,我们就得到了一个二维多边形的骨架表示方式。

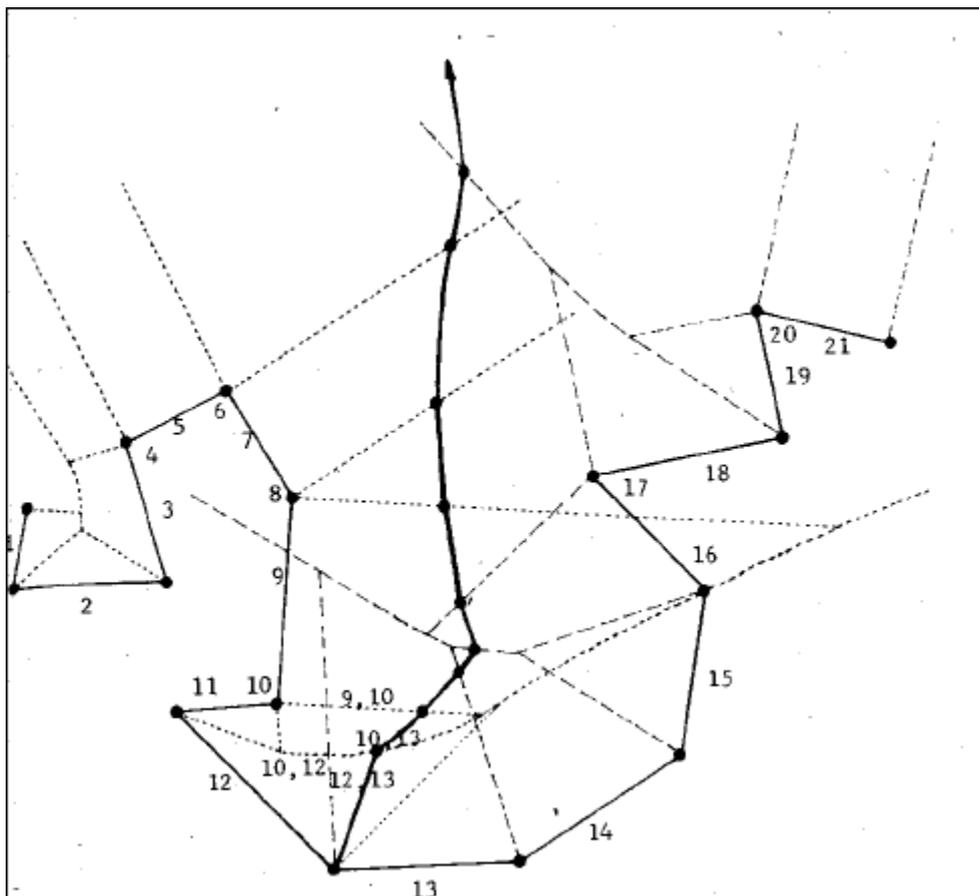
分治算法描述

对于一个简单多边形,可以分成一系列的Chain,一个Chain由连续的边和凹点组成,Chain之间以凸点分割,将chain编号从1到 n ,则分制策略将chain分为两段, $1--n/2$ 和 $n/2+1--n$,对这两段chain求Voronoi分割,然后归并(merge)。

归并过程如下图所示:

假设 S_1 和 S_2 的voronoi图已经算得, S_1 包含 e_1, e_2, \dots, e_j , S_2 包含 $e_{(j+1)}, \dots, e_n$ 。因为 e_j 和 $e_{(j+1)}$ 共同使用一个凸点, $B(j, j+1)$ 是 e_j 和 $e_{(j+1)}$ 的角平分线,将作为起始分割线,类似的, $B(1, n)$ 将作为我们的终止分割线。在merge过程中,假设 $B(s, t)$ 已经取得,算法对 e_s 的voronoi边界做ccw方向的与 $B(s, t)$ 的求交测试,对 e_t 的voronoi边界做cw方向的求交测试,如果与 e_s 的某个voronoi边界 $B(s, s_1)$ 的交点较近,则更新 s 为 s_1 ;如果与 e_t 的某个voronoi边界 $B(t, t_1)$ 的交点较近,则更新 t 为 t_1 。再求 $B(s, t)$,做求交测试。直到求交测试找不到交

点为止，merge结束。而达到了 $B(1, n)$ 时，merge也结束。



实现时，对于每一个元素（边和凹点），维护一个voronoi 边的双向链表，以及上次检查位置和应该插入新边的位置。

多边形骨架提取演示系统

输入方式：

用户可以按照逆时针顺序输入 n 个点，然后根据屏幕提示，结束输入后，本系统给出Voronoi 图的计算结果和骨架的提取结果。

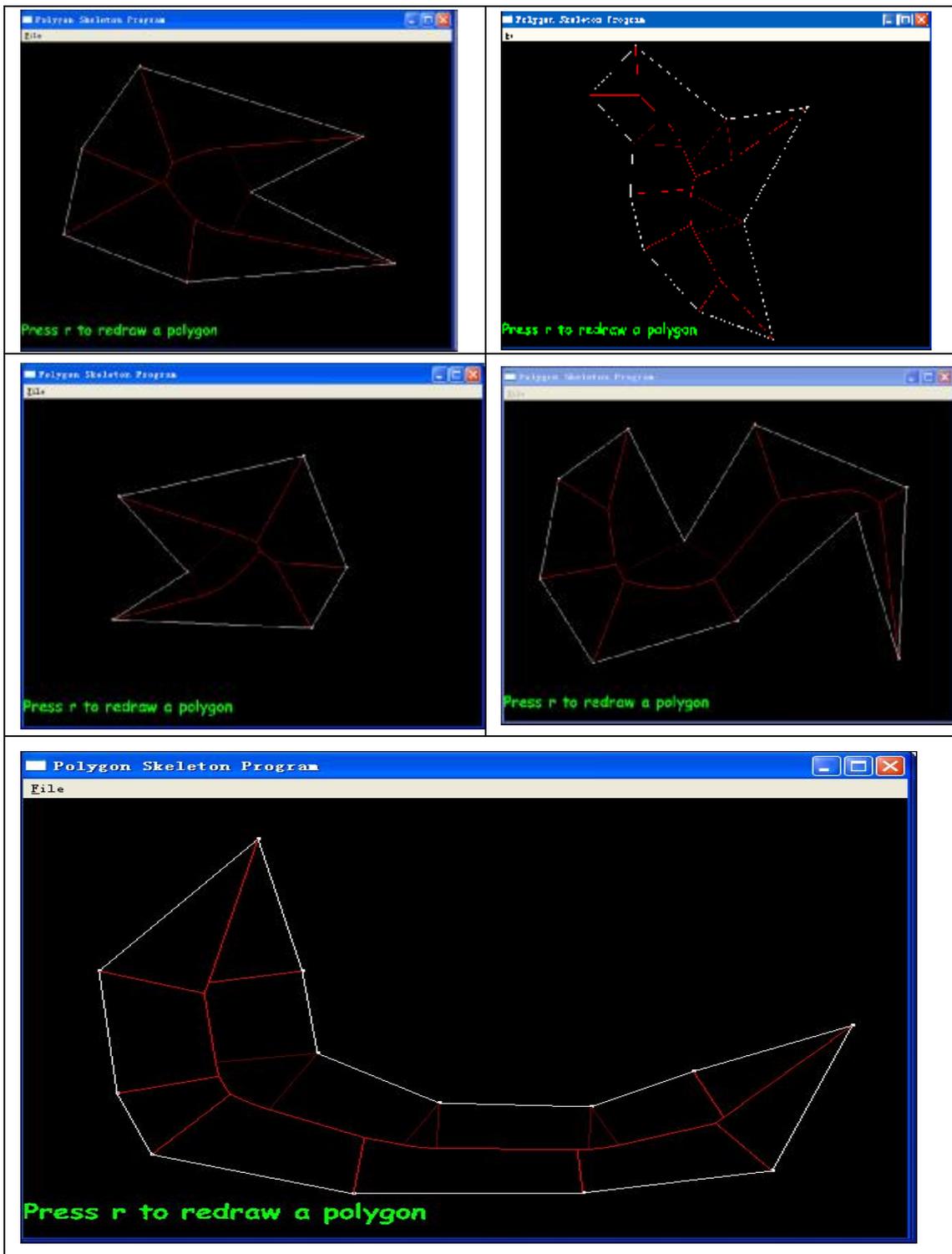
用户可以把本次输入的顶点存到文件，点击菜单栏的File->Save即弹出保存文件对话框。

也可以按照文件输入的方式，点选菜单上的File选项，load写好的输入文件，即可在屏幕上查看骨架提取结果。

如果希望重新Load或者利用图形方式输入新的点集，可以通过屏幕提示，按对应的键盘上的R键完成。

一些结果如下：

（每次都输出了Voronoi 图的计算结果和骨架的提取。其中暗红色的线表示Voronoi 图中被删除掉的边，亮红色的则表示了最终的骨架线结果）



以上点集的输入可以在本系统提供的测试集文件夹中找到。

软件存在的问题

由于求边和边的 bi sector 和边和点的 bi sector 中, 涉及到比较复杂的情况, 限于实现时间, 求边和边的 bi sector 的准确性有待提高; 在归并过程中一些数据结构的更新存在 bug, 导致求凹的多边形的骨架, 鲁棒性不是很理想。

总结

这次课程设计中，我们实现了对简单平面多边形的骨架提取的算法，对Voronoi图的应用和骨架线提取方法的认识得到了提高，提高了编写和调试几何算法的能力，并且体会了计算几何在应用方面的强大能力，这对我们下一步的学习和研究起到了很好的帮助作用。

参考文献

- 【1】 Blum H. A Transformation for Extracting New Descriptors of Shape. Models for the Perception of Speech and Visual Form. W. Walthen-Dunn, ed., 1967
- 【2】 D. T. Lee Medial Axis Transformation of a Planar Shape. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, VOL. PAMI-4, No.4 JULY 1982
- 【3】 Zou JJ. Efficient skeletonisation based on generalized discrete local symmetries [J].Optical Engineering ,2006,45(7):1-7.