平面点集的最小包围圆

1、 问题背景

考察固定在工作平台上的一直机械手，要捡起散落在不同位置的多个零件，并送到别的地方。那么，这只机械手的底座应该选在哪里呢？根据直觉，应该选在机械手需够着的那些位置的“中心”。准确地讲，也就是包围这些点的那个最小圆的圆心----该位置的好处是，可使机械手的底座到它需要够着的那些点的最大距离最小化。于是可得如下问题：给定由平面上 n 个点所组成的一个集合 P（对应于机械手需要够着的工作平台的那些位置），试找出 P 的最小包围圆（smallest enclosing disc）----亦即，包含 P 中所有点、半径最小的那个圆。这个最小包围圆必然是唯一的。

2、算法及原理

算法介绍：我们本次算法的设计是基于这样一个简单直观的性质：在既定的给定点条件下，如果引入一张新的半平面，只要此前的最优解顶点（即唯一确定最小包围圆的几个关键顶点）能够包含于其中，则不必对此最优解进行修改，亦即此亦为新点集的最优解；否则，新的最优解顶点必然位于这个新的半空间的边界上。

定理可以通过反证法证明。

于是，基于此性质，我们便可得到一个类似于线性规划算法的随机增量式算法。定义 D_i 为相对于 p_i 的最小包围圆。此算法实现的关键在于对于 $p_i \notin D_{i-1}$ 时的处理。显然，如果 $p_i \in D_{i-1}$，则 $D_i = D_{i-1}$；否则，需要对 D_i 另外更新。而且，D_i 的组成必然包含了 p_i；因此，此种情况下的最小包围圆是过 p_i 点且覆盖点集{ p_1 ，p_2 ，p_3 ……p_{i-1}}的最小包围圆。则仿照上述处理的思路，D_i={ p_1 ，p_i }，逐个判断点集{ p_2 ，p_3 ……p_{i-1} }，如果存在 $p_j \notin D_i$，则 D_i={p_j，p_i }。同时，再依次对点集{ p_1 ，p_2 ，p_3 ……p_{j-1} }判断是否满足 $p_k \in D_i$，若有不满足，则 D_i={p_k ，p_j，p_i }。由于，三点唯一地确定一个圆，故而，只需在此基础上判断其他的点是否位于此包围圆内，不停地更新 p_k。当最内层循环完成时，退出循环，转而更新 p_j；当次内层循环结束时，退出循环，更新 p_i。当 i=n 时，表明对所有的顶点均已处理过 ，此时的 D_n 即表示覆盖了给定 n 个点的最小包围圆。

算法 MINIDISC（P）
输入：由平面上 n 个点组成的一个集合 P
输出：P 的最小包围圆

1. 令 D_2 为对应于{ p_1，p_2}的最小包围圆
2. for i ← 3 to n
3. do if $p_i \in D_{i-1}$
4. then $D_i \leftarrow D_{i-1}$
5. else $D_i \leftarrow$ MINIDISCWITHPOINT{{ p_1 ，p_2 ，p_3 ……p_{i-1}}，p_i}
6. return D_n

算法 MINIDISCWITHPOINT（P，q）
输入：由平面上 n 个点构成的一个集合 P，以及另外一个点 q
输出：在满足“边界穿过 q”的前提下，P 的最小包围圆

```
令 D1为对应于{ p1，q}的最小包围圆
for  j ← 2 to n
  do if  pj ∈ Dj-1
      then  Dj ← Dj-1
      else  Dj ← MINIDISCWITH2POINT{{ p1 ，p2 ，p3 ……pj-1}，pj，pi}
return  Dn
```

算法 MINIDISCWITH2POINT（P，q_1，q_2）

输入：由平面上 n 个点构成的一个集合 P，以及另外两个点 q_1，q_2

输出：在满足“边界穿过 q_1，q_2”的前提下，P 的最小包围圆

```
令 D0为对应于{ q1，q2}的最小包围圆
for  k ← 1 to n
  do if  pk∈ Dk-1
      then  Dk ← Dk-1
      else  Dk ← q1，q2和 pk确定的圆
return  Dn
```

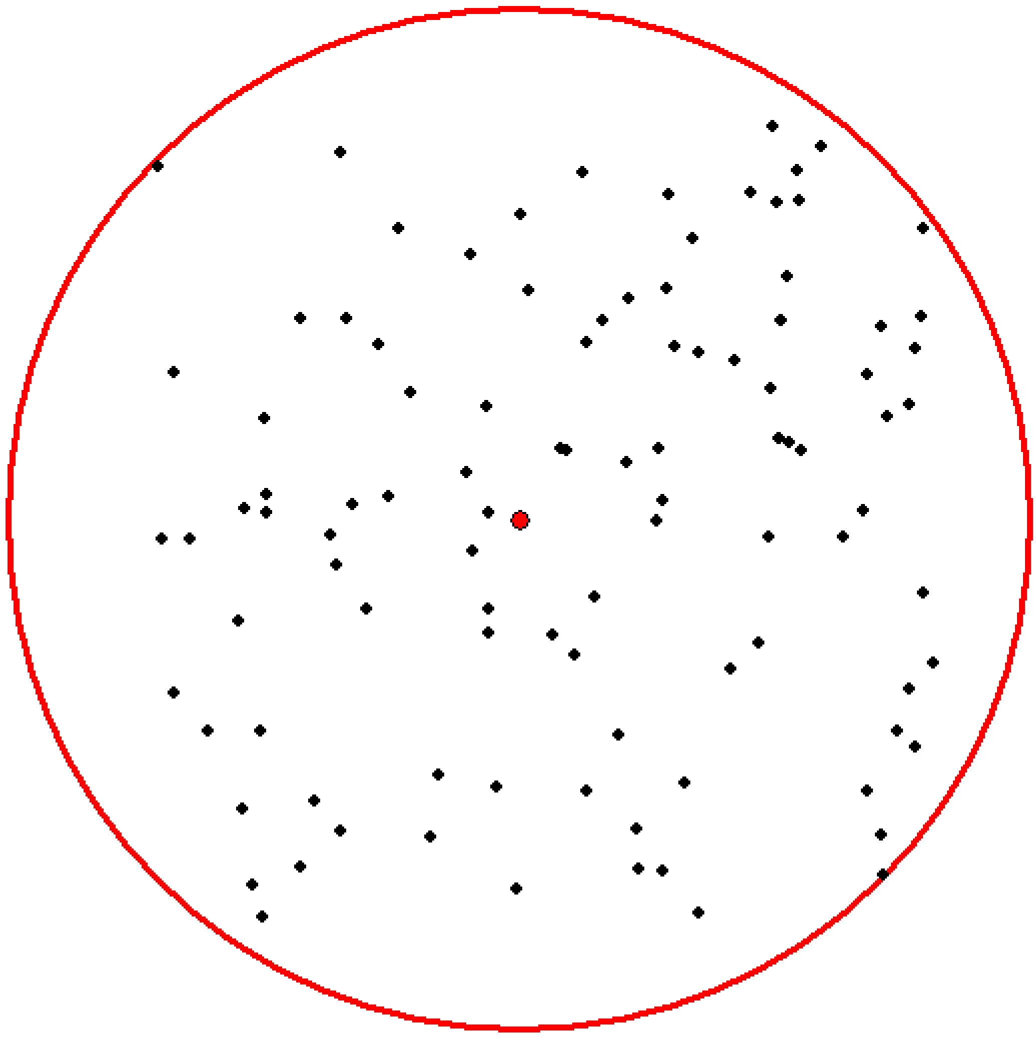
时间复杂度：此算法对于任意给定的 n 个点，可以再 O（n）的期望运行时间内计算出来。

算法 MINIDISCWITH2POINT 中的每一轮迭代循环只需要常数时间，因此其运行时间为 O(n)；另外，它只需要线性的空间。至于算法 MINIDISCWITHPOINT 和 MINIDISC，他们也同样只需要线性的存储空间。对于它们的期望运行时间分析如下：对于算法 MINIDISCWITHPOINT，只要不计入其调用 MINIDISCWITH2POINT 的时间，其余计算所需要的时间为 O（n）。依据概率论分析可以求其期望运行时间的上界 O（n）+

2、 遇到的问题及解决对策

实验之初，我们曾提出一种比较直观的算法，即从平面上的任意三点出发，求其最小包围圆，；再依次判断之外的点，看其相对位置是位于圆内（包括在圆上）还是圆外。若在圆内，则最小包围圆不变，再判断下个点；否则，求包围此四点的最小包围圆。逐个迭代，直至完全遍历。显然，该算法的时间复杂度比较大，达到 O（n^4），在实际应用中是不可取的。

4、测试结果



红色的点为求出的圆心位置显示。

算法效率说明

数据规模	算法执行时间（ms）
50	0
500	16
5000	110
50000	359

5、程序说明

1. 在空白区域可以直接点击鼠标逐个输入点数据。(目前支持最大 65536 个点的数据)，直接计算出最小覆盖圆的圆心，半径

2. 菜单栏"数据"-->"清空数据"：　将已有的数据信息删除，以便完成新的输入操作。

3. 菜单栏"数据"-->"随机数":　　　输入需要的随机点个数，产生随机点。(目前支持最大128个点的数据)

4. 菜单栏"数据"-->"保存样例":　保存当前输入点的信息，存储为txt文件。最后一行的结果为圆心的坐标，圆的半径

5. 菜单栏"数据"-->"选择样例":　根据选择的txt文件，批量生成点的信息数据

6. 状态栏上给出了算法的执行时间

6、参考文献

1.smallest enclosing disks balls and ellipsoids by EMO Welzl
2.计算几何-算法与应用（第二版）