Steiner Tree

一、 实验目的

1. 通过实验，研究各种已有对 Steiner Tree 问题的资料，完成对 Steiner Tree 生成
2. 通过实验锻炼资料查找以及阅读能力，对以后的科研工作打好基础

二、 实验环境

WinXP Visual Studio 2008

三、 实验分析

1. SMT 问题

平面上的 Steiner 问题就是寻求一个给定的平面点集 A 的最短网络问题，该网络允许添加不在 A 中的其它结点，附加的点称为 Steiner 点，简称 s-点：A 中的点称为正则点，简称 a-点，具有上述特征的网络称为 Steiner 最小树（SMT）。

2. SMT 性质。

性质 1. SMT 上任何一个顶点的关联边不多于 3 条,且每个叶子都是源点。

性质 2. 若设 SMT 的源点为 n 个,则 Steiner 点数 m ≤n - 2 。

性质 3. 假设由 n 个源点所围成的区域为凸包,则所有 Steiner 点都必定包含在凸包内。

性质 4. SMT 是完全 Steiner 树 FST(Full Steiner Tree)的联合。

FST 中每个源点的度数是 1 。P 个点的 FST 中含有 P - 2 个 Steiner 点。如果两个 FST 共享一个顶点,那么与这个顶点相关联的两条边之间的夹角≥120°

3. SMT 问题的重要里程碑

在 l 8 世纪末，Fermat 首次提出 Steiner 问题。

1961 年，Melzak 的开创性工作首次给出了该问题的有限简化：

假如两个点 a 和 b 直接连接到-个 s-点，那么当延长时第三条连接到该 s-点的线段，将通过一个等边三角形的第三个顶点 d，该三角形是以 b 作为其它两叶、顶点且位于由 b 决定的不包含该 s-点所在的半平面内。

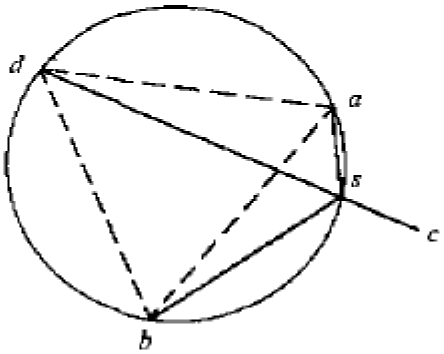


图 1 Melzak 原始几何构造思想

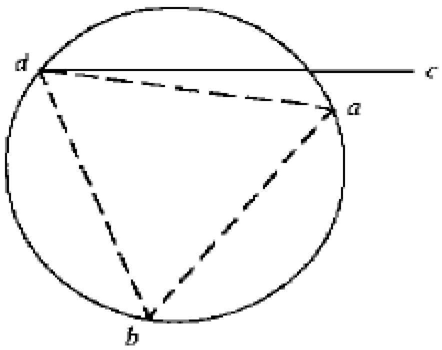


图 2 S－点不存在示例

但算法不管如何改进，仅解决了不到 20 个点的 Steiner 问题 。寻求 Steiner 最小树如此困难，这促使人们考虑寻求 SMT 问题的复杂性。Garey、Graham 与 Johnson 终于证明如下事实：对一般平面点集而言，计算 SMT 最小树问题的难度至少和 NP-hard 问题一样。这一结论，无情地向人们宣告、对一般平面点集而言，不大可能有多项式算法。

四、 实验算法

我们参考了 Steiner Tree Problem's Heuristic with Minimum Spanning Tree Problem 一文中的算法。

具体如下：

The Incremental Optimization Algorithm

1. 对所有输入的 fixed 点做一个距离上的排序，这样会减少最终树的生成与点插入顺序的依赖性；
2. 当加入的 fixed 点数达到 3 时，在三点之间插入一个 Steiner 点，并与三点相连，然后调用 locally optimize 移动 Steiner 点使其接近它应该在的位置，并把这些点和边组成的树存下来，记为 current tree
3. for k = 4, . . . , n do
    a) 复制 the current tree 的边集，记为 Edges
    b) For Edges 的每条边 E (a ,b) do
        i. 记 E (a ,b)的中点为 Steiner 点 s
        ii. 删除 Edges 中的 E (a ,b)，加入 E (s ,a) ，E (s ,b)， E (s ,tk)
        iii. 调用 locally optimize 移动 Steiner 点 s,并记录下边长增量，若其比其它的小，则复制 Edges 到 New Edges
    c) 将 current tree 点集中加入 tk，边集复制 New Edges
4. 将 current tree 传回去记为 Final Tree

Locally optimize Algorithm（记为 Simple Algorithm）

此算法利用 Steiner 点的三条边要相互形成 120°角的原理，利用迭代逼近最终的 Steiner 点

1. 记原 Steiner 点为 s(1),并记 delta s(1) = | s(1)a|+| s(1)b|+| s(1)tk|-|ab|

2. 调用迭代公式 $S(n+1)=S(n)+\frac{1}{3}(\frac{\overrightarrow{S(n)a}}{|\overrightarrow{S(n)a}|}+\frac{\overrightarrow{S(n)b}}{|\overrightarrow{S(n)b}|}+\frac{\overrightarrow{S(n)tk}}{|\overrightarrow{S(n)tk}|})$
3. 当|delta s(n+1)-delta s(n)|<C 后退出
4. s(n+1)点就是所求的 Steiner 点

复杂度分析总的复杂度应为 $\sum_{i=1}^{n} N_i$ (N_i是第N个点插入时边集的大小)

而 $N_i \le i$，因此总复杂度为 $O(\sum_{i=1}^{n} i)=O(n^2)$

改进的 Locally optimize Algorithm（记为 Complex Algorithm）

在原算法找到 Steiner 点后并不直接结束，而是检查与该点相连的点

若其满足一下两个条件：

1、 该点是 Steiner 点

2、 该点在此次循环中未作 Complex Algorithm

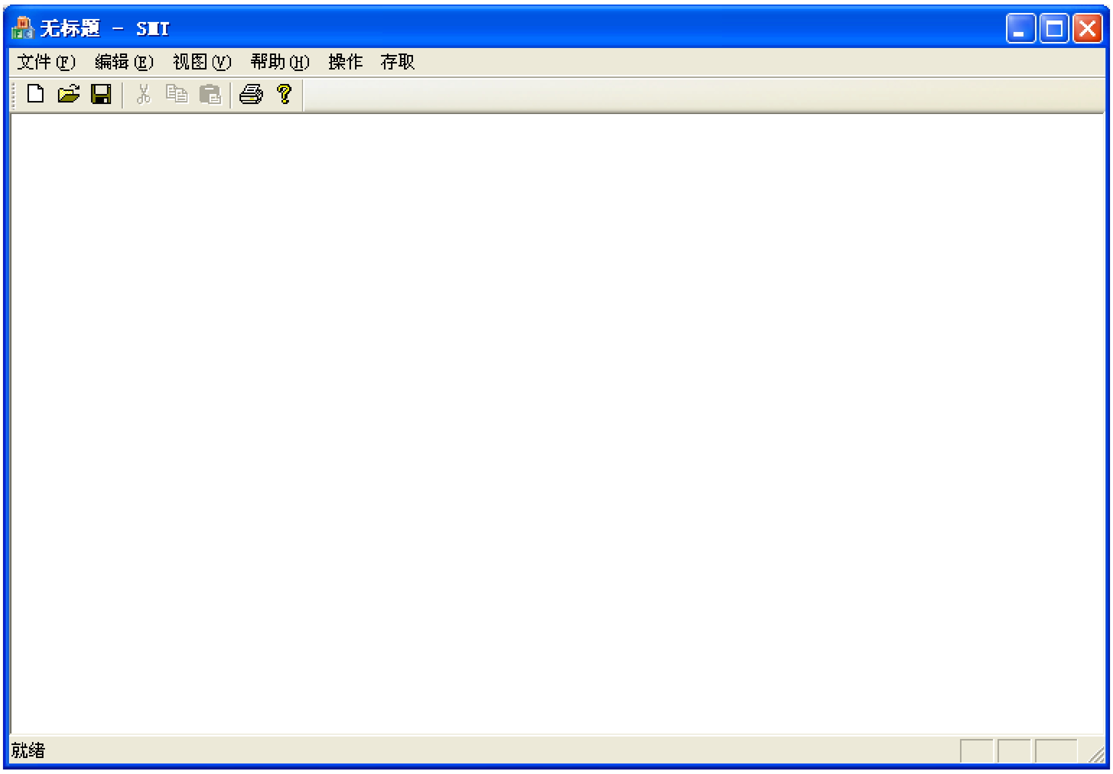
则对该点做 Complex Algorithm

我们不难得出 Complex Algorithm 可以使得到的 Steiner 点更接近正确的位置，但是会牺牲部分时间。

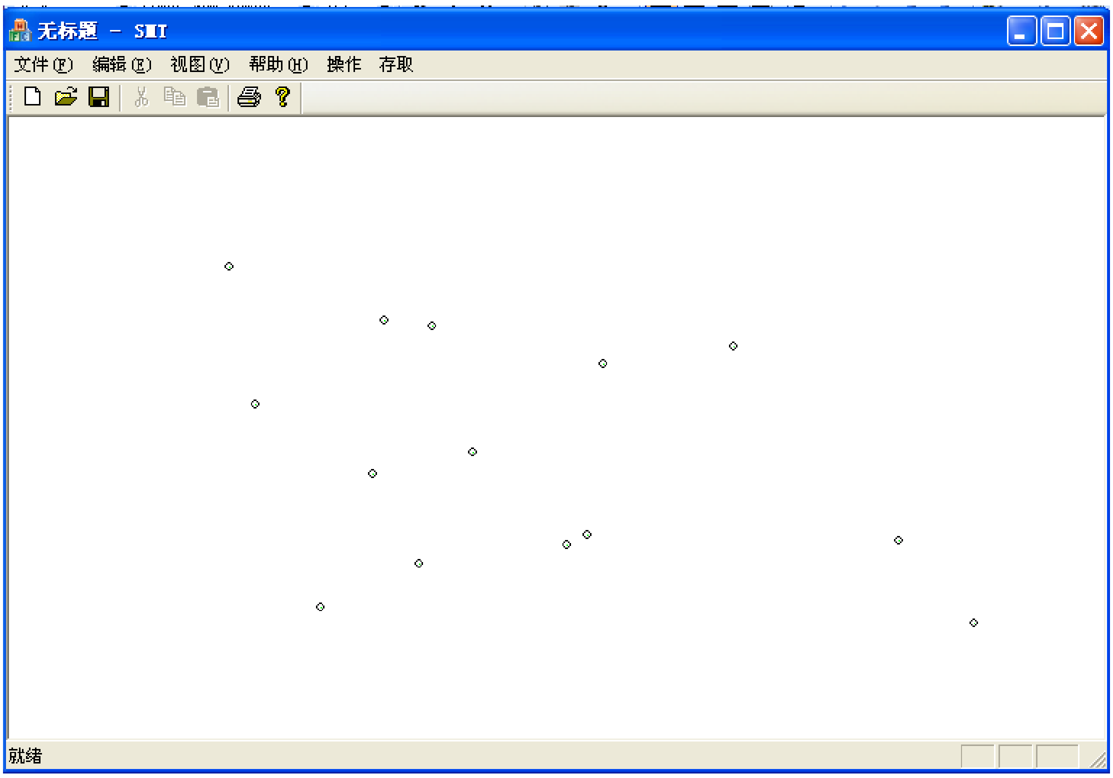
五、 实验结果

1． 基于 Simple Algorithm 得到的 Steiner Tree

打开程序得到以下画面

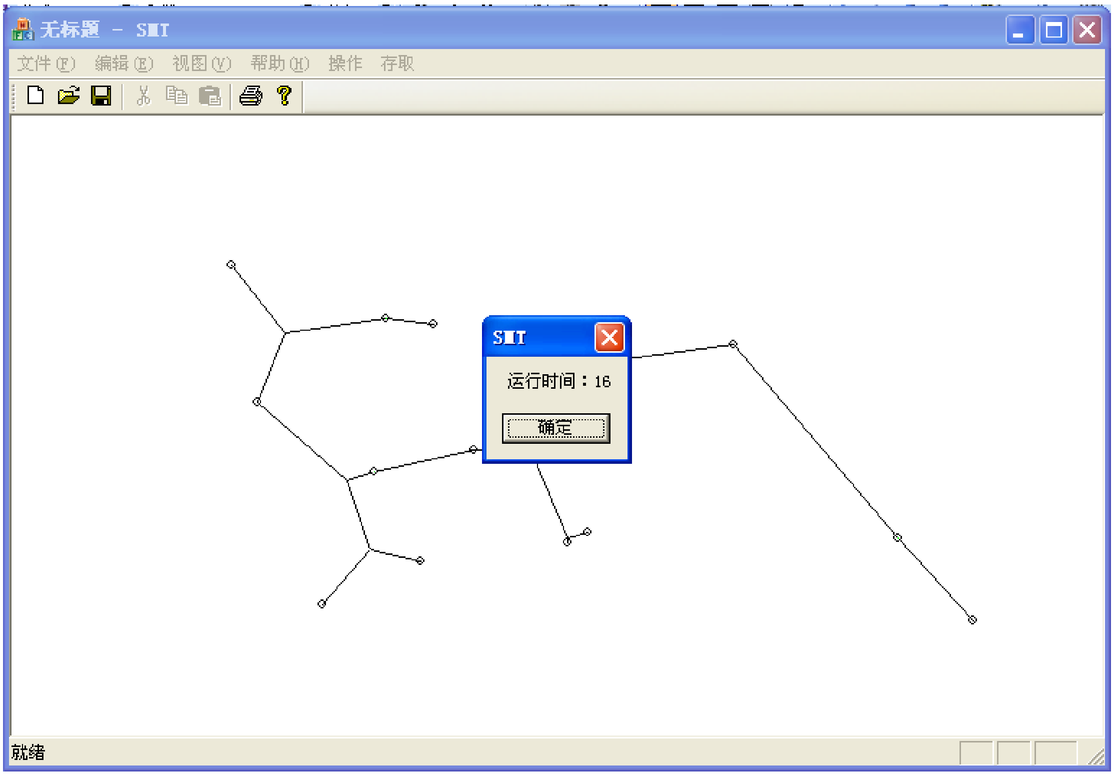


选择操作——>手动加点，在空白处随意点点



再选择操作——>生成 Simple SMT，得到下图

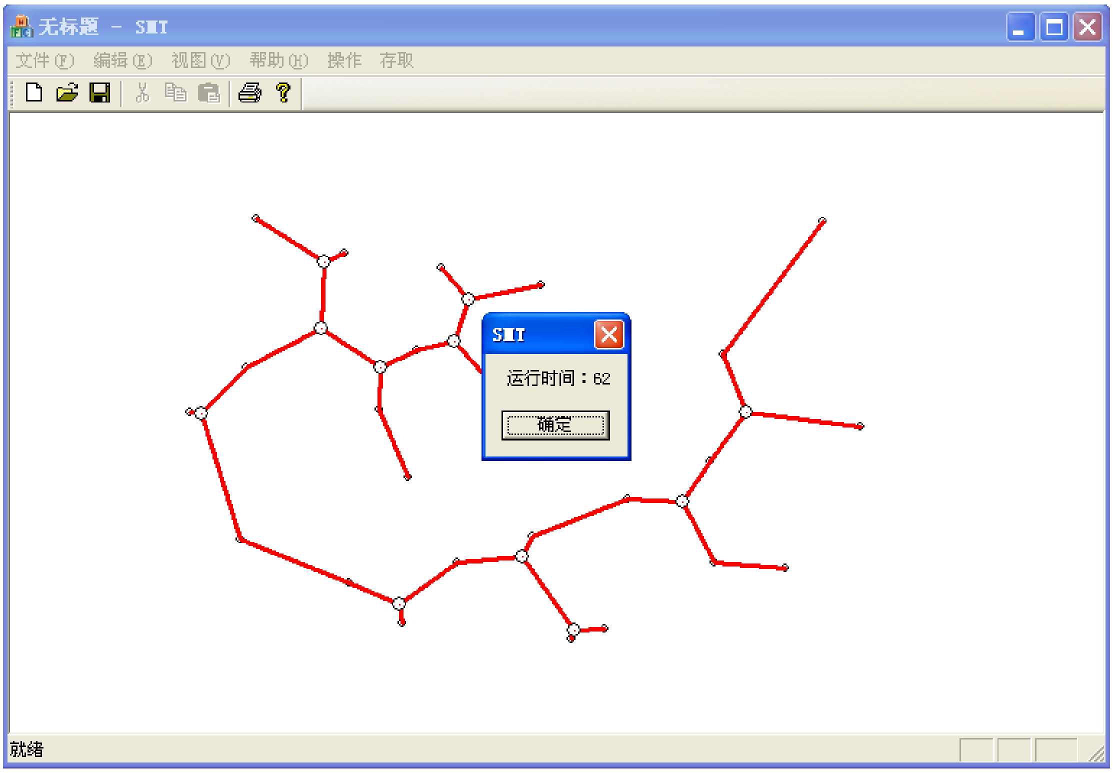
其中划圆圈的点是 Fixed 点，无圈的是 Steiner 点



其中运行时间以 MS 为单位

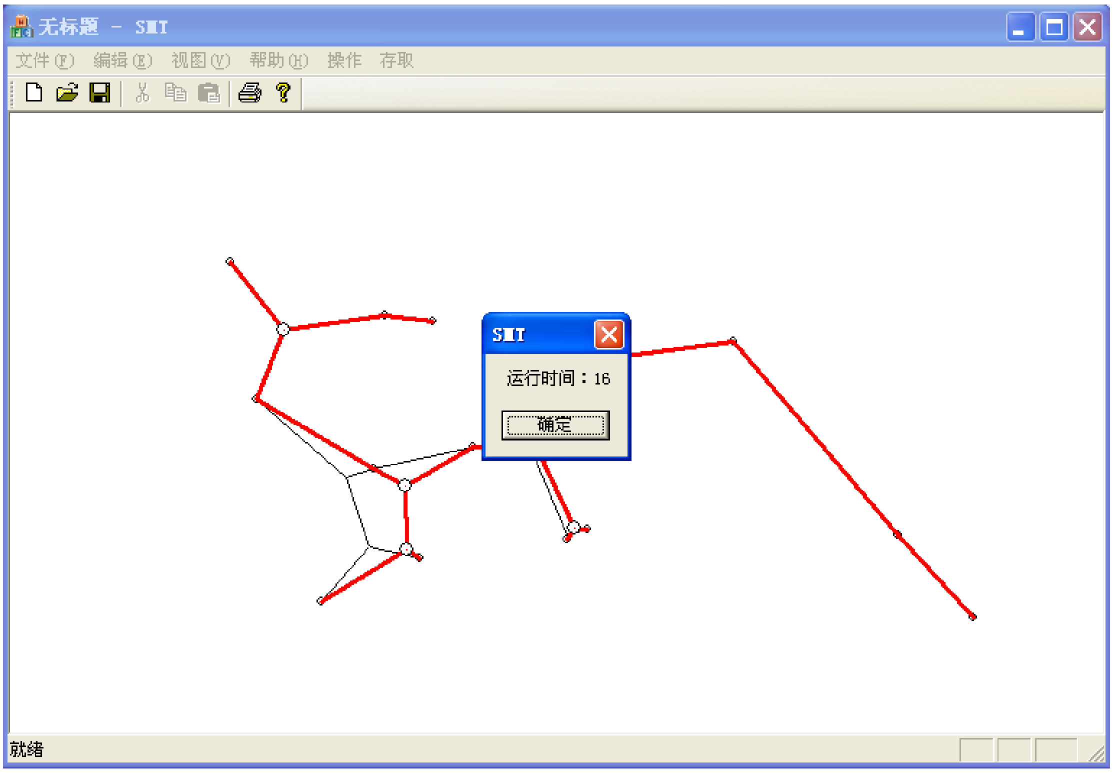
2． 基于 Complex Algorithm 得到的 Steiner Tree

前两步同样，再选择操作——>生成 Simple SMT，得到下图，其中划小圆圈的点是 Fixed 点，大圆圈的是 Steiner 点



3．两种算法的比较

在操作——>生成 Simple SMT，和生成 Complex SMT，会得到如下图



除界面外我们提供一组内核程序随机插点获得 Steiner Tree 的数据，详见实验统计.xls 中 Simple 表格。

分析此表格时，我们发现 Steiner 点大约是 Fixed 点的 0.4 倍，更有趣的是随着 Fixed 点的增加 Steiner 点有时候反而会减少，经分析我们认为是新插入的 Fixed 点可能与某些 Steiner 点重合，造成这些 Steiner 点被删掉。此时我们做了算法复杂度的验证，我们发现：

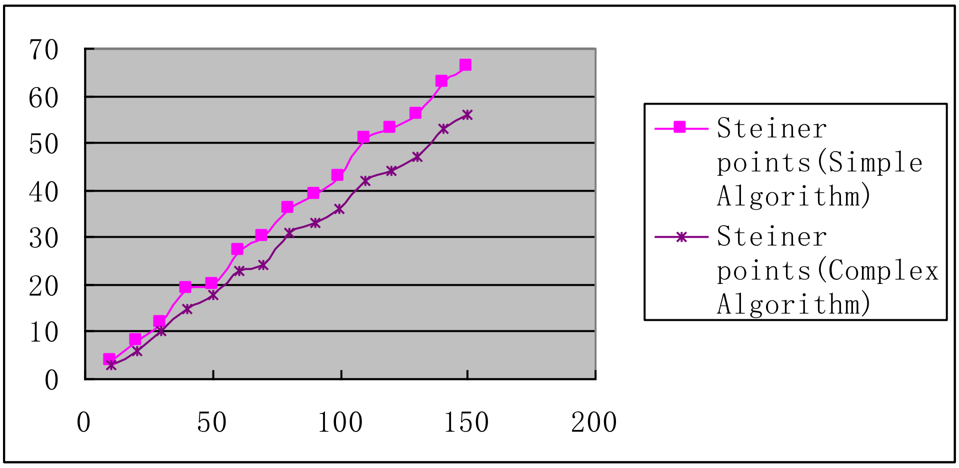
$$\frac{Time}{n^2} \approx 0.05$$

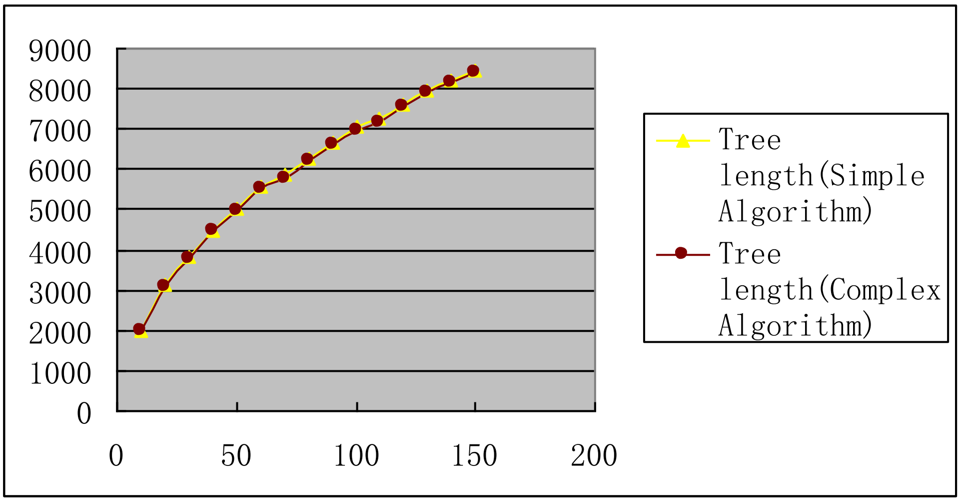
因此算法复杂度得到验证。

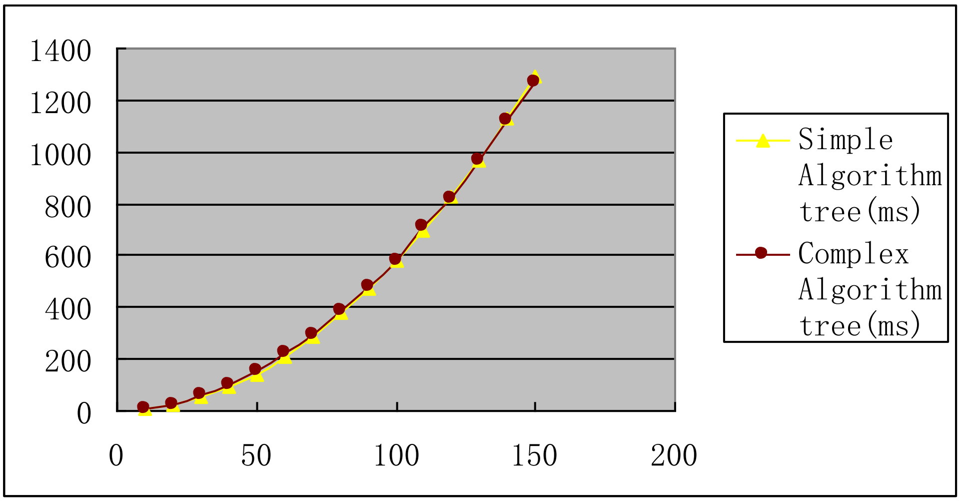
在分析 Making Tree 所花费的时间时，假设人的耐心短大约只有 10 秒，则 Fixed 点大小约为 400。

我们还有一组比较两种算法的数据，详见实验统计.xls 中 Compare 表格。

通过图表（见下图）比较分析此表格，我们不难发现 Complex 算法生成的树中 Steiner 点较少，树的长度较小，但花费的时间较高。我们还发现 Simple 算法得到的树长度其实与 Complex 算法相差不大，因此对于较大的数据，我们可以选择 Simple 算法，减少花费时间。


70
60
50
40
30
20
10
0
0
50
100
150
200
Steiner points(Simple Algorithm)
Steiner points(Complex Algorithm)


9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
50
100
150
200
Tree length(Simple Algorithm)
Tree length(Complex Algorithm)


1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0
50
100
150
200
Simple Algorithm tree(ms)
Complex Algorithm tree(ms)

六、 实验收获

通过此次实验我们对整个 Steiner Tree Problem 有了比较具体的概念，并对计算几何的意义有了充分了解。在此次实验中我们面对了重重困难，例如语言交流障碍等，但我们还是克服重重困难，顺利完成实验。在此十分感谢邓老师对我们实验的指导。

七、 参考资料

1.Steiner Minimal Trees author(s): E. N. Gilbert and H. O. Pollak
Stable URL: http://www.jstor.org/stable/2099400
2.Arbre couvrantpartiel pseudo-optimal pour diffusion multipoint. Raymond Marie and Miklos Molnar (INRIA)
3. Steiner Tree Problem's Heuristic with Minimum Spanning Tree Problem
http://www.personal.kent.edu/~rmuhamma/Compgeometry/MyCG/CG-Applets/SteinerTree/msteinercli.htm
4.Steiner Minimal Trees author(s):Dietmar Cieslik
ISBN：0-7923-4983-0