平面凸集的完美划分问题

Perfect Divisions of Convex Sets in the Plane

张悠慧 005607 计算机系高性能所
万　敏 005615 计算机系高性能所

一、题目背景

这个题目来自于一个有趣的现实问题。在生日派对上，要为孩子们分蛋糕，如何公平合理地切分才能保证每个孩子分到的蛋糕既有一样大的体积，又有一样多的奶油（后一点或许是孩子们更为看重的）。

二、题目描述

2.1 蛋糕（Cake）

记S是xy平面上的一个凸集，给定h>0，定义xyz三维空间中的一个点集

$C=\{(x,y,z)|(x,y,0)\in S且0\leqslant z\leqslant h\}$

称C为以S为基准的一个高为h的蛋糕。如果S是一个多边形的话，则称该蛋糕为多边形蛋糕。

注意到蛋糕的高度是一致的，同时假定C的除掉底面部分的其余表面均匀地涂上了奶油。于是关于蛋糕的划分问题可抽象为平面凸集的划分问题。由此，在本文的余下部分中，我们将只讨论平面凸集的划分问题。

2.2 完美划分（Perfect Partitions）

将一个平面凸集S划分成k个凸集，如果这k个凸集的面积相同，且所占的原S的周边长度也都相同，则称这种划分为凸集S的一个k-完美划分。

2.3 星状完美划分（Radial Perfect Partitions）

对于一个完美划分，如果它的所有划分线均是从同一点发出的线段，则称该划分是一个星状完美划分。

2.4 优美性（Graceful）

一个凸集S称为是优美的，如果对任何k>0，S均存在k-星状完美划分。

三、本文的工作

本文的工作主要包括三个部分。

3.1 相关结论及证明的介绍

这一部分是有关完美划分问题的一些结论与证明的介绍。主要包括如下两个重要结论：
结论1）任意平面凸集均存在3-星状完美划分
结论2）任意平面凸集，对任意k>0，均存在k-完美划分

3.2 相关算法设计

在计算机上，我们只处理任意的平面凸多边形（事实上，任何平面凸集都可在计算机上离散化成凸多边形）。这一部分将针对结论1)2)构造出如下的计算机算法，包括对算法的详细描述与说明：
算法 1）对任意平面凸多边形的 3-星状完美划分算法
算法2）对任意平面凸多边形任意k>0的k-完美划分算法

3.3 相关算法的编程实现

这一部分将编程实现上一部分的两个算法，包括可视化的输入与输出系统。主要包括对系统的概要描述。

四、相关结论及证明的介绍

4.1 凸多边形的优美性

共切（co-circular）多边形

称一个多边形是一个共切多边形，如果它存在一个内切圆（即它的任何一条边均与该圆相切）。

定理 1.

定理 1.　凸多边形：优美性<=>共切性，完美划分<=>星状完美划分

4.2 平面凸集的 3-星状完美划分

定理 2.

定理 2.　任何一个平面凸集均存在 3-星状完美划分

该定理的结论不能扩展到边数大于等于4的凸多边形的完美划分。为证明这一定理，需要连续证明如下7个引理。

引理 1.

引理1.　如果将凸集S的边划分为连续长度相同的三段，这三段分别包围的面积若都不超过S面积的1/3，则定理2成立。

引理 2.

引理2.　$\triangle ABC$与$\triangle BCX$，若$\angle BCA<\angle BCX$且$\angle ABC<\angle BCX$，且$|AB|+|AC|=|XB|+|XC|$，则$S(\triangle ABC)>S(\triangle BCX)$。

引理 3.

引理3.　△ABC，其中∠BCA >∠ABC，X、D分别是边CA上的点，E是AB上的点，满足|BE| + |ED| +|DC| = |XB|+|XC|。那么四边形BCDE的面积大于三角形XBC的面积。

引理 4.

引理4.　△ABC,其中∠BCA > ∠ABC。Q是ABC内的一凸多边形，顶点为Q1=c, Q2,...Qn-1,Qn=B(n>3)。同时Q2,Qn-1分别在边CA、AB上。X是CA上的点，使得|CX|+|XB| = |Q1Q2|+...+|Qn-1Qn|。那么Q的面积大于△XBC的面积。

引理 5.

引理5.　△ABC,其中∠BCA > ∠ABC。Q是ABC内的连接B、C的一凸形。Y是CA上的点使得|CY|+|YB|等于Q的长度。那么Q与BC围成的面积大于△XBC的面积。

引理 6.

引理6.　已知凸集S，S1、S2、S3是S的边的一个等长划分，那么S1、S2、S3所分别围成的面积中，至多只有一个不小于S面积的1/3。

引理 7.

引理7.　对于凸集S，存在一个边的3等长划分：S1,S2,S3，满足S1,S2 ,S3围成的面积均小于S面积的1/3。

4.3 凸集的 4 完美划分

定理三.

定理三.　若 a、b 为正实数，且 a>4b。则以 a,b 为边长的矩形 R 不存在 n-星状完美划分(n>=5)。此外存在一凸四边形，它不存在 4-星状完美划分。

正规（normal）凸集

称一个凸集是一个正规凸集，如果该凸集边界上的任何连续一段长度等于整个周长的1/4的

边s，其所围成的面积均小于等于整个凸集面积的1/4。

定理 4.

定理4.　若S是一个正规凸集，则S存在4-星状完美划分。

4.4 凸集的一般完美划分

定理 5.

定理5.　任意凸集S，对任意的自然数k，均存在k-完美划分。
证明这一点是通过另一更强的定理来实现的，如下：

定理 6.

定理6.　设S是一个平面凸集，其边界被间隔地着上红蓝两色。则对于任何的正整数k，存在一个划分将S分为k个凸集，每一块具相同的面积，且每块具有的红边的长度恰为总红边长度的1/k。

五、相关算法设计

下面仅简要列出本文将涉及到的主要算法及梗概

5.1 多边形数据结构

多边形依顶点逆时针序构成一个顶点的双向链表

5.2 左转向（Left turn）算法

三点(x1,y1), (x2,y2), (x3,y3)构成左转向的判别条件为：

$$\begin{vmatrix} 1 & x1 & y1 \\ 1 & x2 & y2 \\ 1 & x3 & y3 \end{vmatrix} > 0$$

5.3 两点距离算法

两点(x1,y1), (x2,y2)的欧氏距离为 sqrt((x1-x2)*(x1-x2) + (y1-y2)*(y1-y2))

5.4 三角形面积算法

左转向三点(x1,y1), (x2,y2), (x3,y3)构成的三角形面积为：

$$\begin{vmatrix} 1 & x1 & y1 \\ 1 & x2 & y2 \\ 1 & x3 & y3 \end{vmatrix} \quad / \quad 2$$

5.5 凸多边形面积算法

将凸多边形顺次切成各个三角形分别计算面积后求各即可

5.6 弓形旋转算法

这是全部系统的核心算法。

讨论满足一定限制条件的弓形（如要求弓形的弧长为某定值或所含红边为定值）。设有一个面积阈值 s，已知弓形 S1 的面积 ＜s，弓形 S2 的面积 ＞s，弓形 S1 在数学上可平滑旋转变成弓形 S2，所以在旋转过程中一定存在一个弓形 S，使弓形 S 的面积恰好为 s。

这个算法的目的就是要根据 S1,S2,s 来找到这样一个 S。我们将用类似二分法的方法来实现：

一个弓形 S 一段弦及一段弧构成，整个弓形由弦的位置唯一确定，而整个弦又由弦的起点及相应的限制条件所唯一确定。算法简述如下：

1) S-low = S1, S-high = S2
2) 如果 S-low 的弦起点与 S-high 的弦起点相差在误差范围以内则将 S-low 作为最后结果退出
3) 根据 S-low 的弦起点与 S-high 的弦算出一个中间位置的弦起点，并由此决定出一个中间位置的弓形 S-middle
4) 如果 S-middle 的面积>s 则令 S-high=S-middle 否则令 S-low=S-middle
5) 返回 2)

5.7 3-星状完美划分算法

1) 将所给凸多边形的周边任意地等长划分为三部分 S1、S2、S3
2) 如果 S1，S2，S3 所形成的弓形面积都小于 S 面积的 1/3 则转 4)
3) 根据引理 7 的证明，利用弓形旋转算法，可将等分点适当旋转使 S1，S2，S3 所形成的弓形面积都小于 S 面积的 1/3
4) 根据引理 1 的证明，通过求两条平等线的交点可定出星状划分的中心点，从而作出 3-星状完美划分

5.8 二色 k-完美划分算法

这是求 k-完美划分算法的核心部分。

设 S 是一个平面凸集，其边界被间隔地着上红蓝两色。该算法的目的是要对任何正整数 k，找到 S 的一个 k 划分，使每一块具有相同的面积，且每块具有的红边的长度恰为总红边长度的 1/k。

算法是一个递归算法，梗概如下：

1) 若 k=1，则直接返回

2) 若 k=2，则

2.1)将 S 的周边任意划分为满足红边长度要求的两部分 S1 和 S2

2.2)若 S1 与 S2 对应的弓形面积相等，则已合要求，可返回

2.3)若 S1 与 S2 对应的弓形面积不等，则利用弓形旋转算法，可将等分点适当旋转后，使 S1 与 S2 对应的弓形面积相等，从而合要求，可返回

3) 若 k=2m，则

3.1)先求 S 的一个 2-完美划分，设被分为 S1 与 S2 两个周边部分

3.2)将划分线 L 着为蓝色

3.3)分别求出 S1∪L 与 S2∪L 的 m-完美划分即可

4) 若 k=2m+1，则

4.1) 将 S 的周边任意划分为满足红边长度要求的 k 部分 S1 至 Sk，设等分点为 P1 至 Pk

考察由此形成的三个部分：

T1：弦 P1Pm+1 对应的弓形

T2：弦 Pm+1P2 对应的弓形

T3：弦 P1P2 对应的弓形

T4：△P1P2Pm+1

4.2) 若 T1 面积≥m*S 的面积/k（T2 面积≥m*S 的面积/k 的情况与此类似）

4.2.1)利用弓形旋转算法，可将等分点适当旋转后，使 T1 面积= m*S 的面积/k

4.2.2)将划分线 L 着为蓝色

4.2.3)分别求出 T1 的 m-完美划分和(S-T1)∪L 的(m+1)-完美划分即可

4.3) 若 T3 面积≥S 的面积/k

4.3.1)利用弓形旋转算法，可将等分点适当旋转后，使 T3 面积= S 的面积/k

4.3.2)将划分线 L 着为蓝色

4.3.3)求出(S-T3)∪L 的 2m-完美划分再并上 T3 即可

4.4) 还剩下的情况是 T3∪T4 的面积≥S 的面积/k

4.4.1)根据定理 6 的证明过程找到一个划分中心，由此将 S 划分为面积分别为 m*S 的面积/k、m*S 的面积/k、S 的面积/k 的三个部分

4.4.2)将划分线着为蓝色

4.4.3)分别求出前两个部分的 m-完美划分再并上第三部分即可,

5.9 k-完美划分算法

1) 将所给凸多边形的边全染成红色

2) 调用二色 k-完美划分算法即可

六、相关算法的编程实现

将用VC++在windows平台上实现一个可视化的凸多边形完美划分系统，用户用鼠标划定一个凸多边形，然后调用程序进行3-星状完美划分或k-完美划分，并显示出最后的划分结果。

参考文献

1. J. Akiyama, G. Nakamura, E. Rivera-Campo, and J. Urrutia, Perfect division of a cake, Proceedings of the Tenth Canadian Conference on Computational Geometry, 114-115.
2. J. Goodman and J. O'Rourke, Handbook of Discrete and Computational Geometry, CRC Press, (1997)
3. A. Kaneko and M. Kano, Perfect n -partitions of convex sets in the plane, submitted.